



Faculté
des Sciences

Département de Mathématique

UMONS
Université de Mons

Ondes solitaires pour une équation de Schrödinger non-linéaire

Mémoire réalisé par Damien GALANT
pour l'obtention du diplôme de Master en sciences mathématiques

Service : Analyse Numérique

Directeur : Christophe TROESTLER

Année académique 2020–2021

Remerciements

Je remercie vivement Mme Colette De Coster et M. Christophe Troestler pour nos nombreuses discussions au cours de cette année académique. Je tiens à souligner leur bienveillance et leur disponibilité.

Merci aussi à M. Serge Nicaise, M. Louis Jeanjean et M. Jean-Baptiste Castéras pour les conseils apportés.

Enfin, je tiens également à remercier les professeurs de la faculté des sciences de l'UMONS et ceux du département de mathématique d'Orsay pour la qualité de leur enseignement.

Table des matières

Table des notations	v
Introduction	1
I Réarrangement symétrique décroissant	7
I.1 Symétrisation de Schwarz des sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^N	8
I.2 Mesures de l'image d'une fonction	10
I.2.1 Mesure push-forward et théorème de changement de variables	10
I.2.2 Sur-ensembles de niveau, décomposition layer-cake et fonction de distribution	11
I.2.3 Lien entre la mesure push-forward, la fonction de distribution et l'intégration	15
I.3 Symétrisation des fonctions admissibles	16
I.3.1 Définitions et premières propriétés	16
I.3.2 Pseudo-inverse de μ_u	18
I.3.3 Symétrisation des fonctions L^2 positives	19
I.3.4 Symétrisation et régularité	21
I.4 Polarisations	23
I.4.1 Réflexions orthogonales	23
I.4.2 Définition et premières propriétés des polarisations	24
I.4.3 Polarisations dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$	30
I.5 Approximation de la symétrisation par une suite de polarisations	36
I.6 Inégalité de Pólya–Szegő	40
II Inégalité de Gagliardo-Nirenberg	43
II.1 Plongements compacts	45
II.1.1 Pertes de compacité par translations	45
II.1.2 Espaces de fonctions radiales	46
II.1.3 Pertes de compacité par dilatations	51
II.2 Calcul des variations	53

II.2.1	Inégalité de Gagliardo-Nirenberg	53
II.2.2	Formulation variationnelle	54
II.3	Régularité des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$	61
II.4	Identités de l'énergie et de Pohožaev, ground states	65
II.5	Cas « $q = 2^*$ », résultat de G. Talenti	73
III	Propriétés qualitatives	75
III.1	Solutions positives	76
III.1.1	Stricte positivité	76
III.1.2	Régularité C^∞	76
III.1.3	Symétrie radiale, méthode du moving plane	77
III.2	Solutions radiales	82
III.2.1	Interprétation physique du problème, énergie	83
III.2.2	Décroissance exponentielle	85
III.2.3	Unicité des solutions positives	88
III.3	Conclusion	91
III.3.1	Cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg	91
III.3.2	Autres solutions de l'équation	92
Annexes		93
A	Espaces fonctionnels	95
A.1	Fonctions C^∞ à support compact	95
A.2	Convolution et régularisation	97
A.3	Convergence au sens des distributions	100
A.4	Dérivées faibles et espaces de Sobolev	101
A.4.1	Définitions	101
A.4.2	Opérations dans les espaces de Sobolev	104
A.4.3	Densité dans les espaces de Sobolev	107
A.5	Espaces de Hölder	109
A.6	Plongements de Sobolev	110
B	Principe du maximum	113

Table des notations

$|z|$: module d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$

$|x|$: norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$

$u \cdot v$: produit scalaire entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^N$

$g \cdot x$: produit matriciel entre une matrice g de taille $N \times N$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$

$O(N)$: groupe orthogonal sur \mathbb{R}^N

$[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$: segment joignant deux points $x, y \in \mathbb{R}^N$

$\sigma_{\Pi}(x)$: réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan affine Π

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < r\}$: boule ouverte de centre x_0 et de rayon r (pour la norme euclidienne)

$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| \leq r\}$: boule fermée de centre x_0 et de rayon r (pour la norme euclidienne)

$\mathbb{S}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| = r\}$: sphère de centre x_0 et de rayon r (pour la norme euclidienne)

Vol : mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N

$\sigma_{\mathbb{S}(x_0, r)}$: mesure de surface sur la sphère $\mathbb{S}(x_0, r)$

$\mathbb{1}_A$: fonction indicatrice de l'ensemble A

\overline{A} : adhérence de l'ensemble A

$\text{int } A$: intérieur de l'ensemble A

$\partial A := \overline{A} \setminus \text{int } A$: bord de l'ensemble A

$\mathcal{C}(X, Y)$: ensemble des fonctions continues entre deux espaces X et Y

$\omega_u(\delta)$: module de continuité de la fonction u , voir la proposition [I.56](#)

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$: multi-indice

$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$: longueur d'un multi-indice (le contexte distingue cette notation de celle de la norme euclidienne)

$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$: dérivée partielle selon la j^{e} variable

$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N}$: notation multi-indice pour les dérivées

Ω : ouvert non-vide de \mathbb{R}^N . On suppose Ω connexe dans l'appendice B.

$\omega \subset\subset \Omega$: ω est un ouvert et $\bar{\omega}$ est un compact de Ω

$\mathcal{C}^k(\Omega)$: espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) et à valeurs réelles sur l'ouvert Ω

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$: espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) et à valeurs réelles sur l'ouvert Ω dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k admettent des prolongements continus à $\bar{\Omega}$

$\mathcal{C}^{k,\theta}(\Omega)$, $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{k,\theta}(\bar{\Omega})$: espaces de Hölder, voir la définition A.40

$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$: support d'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, voir la définition A.1.

$\mathcal{C}_c(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \text{supp } u \text{ est compact dans } \Omega\}$: espace des fonctions continues, à valeurs réelles et à support compact dans Ω , voir la définition A.1.

$\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$: espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), à valeurs réelles et à support compact dans Ω

$\mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$: espace des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ à symétrie radiale

$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$: gradient de la fonction u

$\Delta u := \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_{ii} u$: laplacien de la fonction u

$\text{div } v := \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_i v_i$: divergence du champ de vecteurs v

$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$: convergence au sens des distributions, voir la définition A.15

$u * v$: convolution entre les fonctions u et v , voir la définition A.8

$L^p(\Omega)$, $L^p(\Omega; \mathbb{C})$: espaces L^p définis sur Ω et à valeurs réelles (resp. complexes)

$\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$: norme d'une fonction $u \in L^p(\Omega)$ (Ω est omis si le contexte le permet)

$L_{\text{loc}}^1(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega, u|_\omega \text{ appartient à } L^1(\omega)\}$ espaces de fonctions localement intégrables sur Ω et à valeurs réelles

$L_+^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid u \geq 0\}$

$W^{k,p}(\Omega)$, $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{C})$, $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega; \mathbb{C})$: espaces de Sobolev d'ordre k basés sur $L^p(\Omega)$ et $L^p(\Omega; \mathbb{C})$, voir la définition A.24

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, $H^k(\Omega; \mathbb{C}) = W^{k,2}(\Omega; \mathbb{C})$: espace de Sobolev d'ordre k basé sur $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega; \mathbb{C})$, voir la définition A.24

$H_+^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$

$H_r^1(\mathbb{R}^N)$: espace des fonctions $H^1(\mathbb{R}^N)$ à symétrie radiale

$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3 \\ \infty & \text{si } N = 1 \text{ ou } N = 2 \end{cases}$: exposant critique du plongement de Sobolev

pour l'espace H^1 , voir le théorème [A.41](#) et la remarque [A.44](#)

$\mathcal{F}^* := \{\emptyset\} \cup \{B(0, r) \mid r > 0\} \cup \{\mathbb{R}^N\}$

A^* : symétrisation d'un ensemble mesurable A , voir la définition [I.1](#)

λ_u : mesure push-forward λ_u associée à une fonction u , voir la définition [I.8](#)

$\{u > t\} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) > t\}$: sur-ensemble de niveau t associé à la fonction u , voir la définition [I.13](#)

u^* : symétrisation d'une fonction admissible u , voir les définitions [I.19](#) et [I.28](#)

\mathcal{H}_0 : ensemble des demi-espaces affins fermés de \mathbb{R}^N qui contiennent 0.

u^H : polarisation de la fonction u par rapport au demi-espace H , voir la définition [I.47](#)

$D_\lambda u$: dilatation de la fonction u par un facteur λ , $D_\lambda u(x) := u(\lambda x)$

Introduction

L'équation de Schrödinger *non linéaire*

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{q-2}u, & (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x), & u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

est une importante équation aux dérivées partielles d'évolution (voir [12, 13, 40, 17, 37]). Dans l'écriture précédente, $i^2 = -1$, $\Delta = \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_{ii}$ désigne le laplacien sur \mathbb{R}^N et $q > 2$ est un paramètre réel. Comme pour les équations différentielles ordinaires (EDO), une solution du problème (NLS) consiste en la donnée d'un intervalle temporel $[0, T[$ et d'une fonction $u : [0, T[\times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant l'équation et la condition initiale. Cette équation a de nombreuses applications en physique (voir [2]).

Les solutions de (NLS) obéissent (au moins formellement) à des lois de conservation.

Ainsi, la *masse* L^2 ,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

et l'*énergie*,

$$\mathcal{E}(u(t, \cdot)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t, x)|^2 dx - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x)|^q dx$$

(où le gradient est pris par rapport à x) sont préservées au cours de l'évolution. Autrement dit, si u est une solution du problème alors les égalités $\|u(t, \cdot)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ et $\mathcal{E}(u(t, \cdot)) = \mathcal{E}(u_0)$ sont vérifiées pour tout temps $t \in [0, T[$.

D'après l'expression de ces lois de conservation, il est naturel de chercher des solutions $u(t) := u(t, \cdot)$ qui sont des fonctions de $[0, T[$ dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) \mid \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})^N\}$. D'après le théorème de plongement de Sobolev (théorème A.41), l'espace $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ s'injecte dans $L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ pour tout $p \in \mathbb{R} \cap [2, 2^*]$, où l'exposant critique 2^*

vaut $2N/(N-2)$ si $N \geq 3$ et est infini si $N \in \{1, 2\}$. Ainsi, l'énergie est bien définie sur $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ lorsque $q \in \mathbb{R} \cap [2, 2^*]$.

Un résultat de Ginibre et Velo (voir [21]) implique que l'équation (NLS) est bien posée dans $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ pour tout $2 < q < 2^*$. Autrement dit, si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, il existe un temps $T \in]0, +\infty]$ et une unique solution maximale $u \in \mathcal{C}([0, T[, H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}))$ à l'équation (NLS).

La situation est semblable à celle des équations différentielles ordinaires :

- si $T = +\infty$ alors la solution est dite *globale* ;
- si $T < +\infty$ alors $\lim_{t \rightarrow T} \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2} = +\infty$ et on dit que la solution *explose en temps fini*.

L'existence de solutions explosives est liée à la non-linéarité de l'équation. En effet, toutes les solutions de l'équation de Schrödinger linéaire $i\partial_t u = -\Delta u$ sont globales dans $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.

On se demande quelle est l'influence de q et de la condition initiale u_0 sur la présence, ou non, de phénomènes d'explosion. On se demande également si toutes les solutions explosent à la même vitesse que les solutions de l'équation différentielle $i\partial_t v = -|v|^{q-2}v$.

D'une part, l'équation (NLS) admet des *ondes solitaires*, à savoir des solutions de la forme $e^{it}Q(x)$ où la fonction Q est solution de l'équation

$$-\Delta Q + Q = |Q|^{q-2}Q \quad (\text{EDP}_Q)$$

sur \mathbb{R}^N . Ces solutions sont inchangées (à une phase près) lors de l'évolution et sont donc « à l'opposé » des phénomènes d'explosion.

D'autre part, *l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg* affirme que pour tout $2 < q < 2^*$, il existe une constante $C_q > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, on a

$$\|v\|_{L^q} \leq C_q \|v\|_{L^2}^{1-s} \|\nabla v\|_{L^2}^s$$

où $s := \frac{(q-2)N}{2q}$. En utilisant les lois de conservation de la masse et de l'énergie et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on montre que

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = 2\mathcal{E}(u_0) + \frac{2}{q}\|u(t)\|_{L^q}^q \leq 2\mathcal{E}(u_0) + \frac{2(C_q)^q}{q} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{qs} \|u_0\|_{L^2}^{q(1-s)}.$$

Si $q < 2 + \frac{4}{N}$, l'exposant qs est strictement inférieur à 2 et l'inégalité précédente implique que la norme $\|\nabla u(t)\|_{L^2}$ est bornée uniformément en t . Dès lors, l'exposant $q = 2 + \frac{4}{N}$ est l'exposant minimal pour lequel il peut y avoir des solutions explosives. Ce cas, dit *de masse-critique*, est particulièrement intéressant en dimension 2 où l'équation (NLS) avec $q = 4$ apparaît comme un modèle de faisceau laser en optique non-linéaire, voir [17, 37]. Lorsque $q \geq 2 + \frac{4}{N}$, il est nécessaire de déterminer la *constante optimale* dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg afin d'obtenir des critères d'explosion optimaux.

Les deux objectifs principaux de ce mémoire sont la détermination des cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et l'étude de propriétés qualitatives des solutions de l'équation des ondes solitaires (EDP_Q) dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Afin de trouver la constante optimale et un cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, il faut chercher un *minimum global* de la fonctionnelle¹

$$\mathcal{J}(u) := \frac{\|u\|_{L^2}^{q(1-s)} \|\nabla u\|_{L^2}^{qs}}{\|u\|_{L^q}^q}$$

sur l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Il s'avère qu'il suffit de minimiser \mathcal{J} sur l'espace $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $H^1(\mathbb{R}^N)$ à symétrie radiale. En effet, le procédé de *réarrangement symétrique décroissant* associé à une fonction positive u avec le bon comportement à l'infini une fonction u^* radialement décroissante « de même taille » en préservant toutes ses normes L^p . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce procédé symétrise l'ensemble de *sur-niveau* $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) > t\}$ en une boule de même volume centrée en l'origine (voir la figure 1 pour une illustration en dimension 1). Une importante inégalité due à Polyá et Szegő affirme que si u appartient à $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, alors u^* appartient également à $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ et $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$. Donc $\mathcal{J}(u^*) \leq \mathcal{J}(u)$, ce qui explique pourquoi nous pouvons nous restreindre à $H_r^1(\mathbb{R}^N)$.

Vu l'importance du procédé de réarrangement symétrique décroissant, nous avons dédié le premier chapitre de ce mémoire à son étude ainsi qu'à une preuve de l'inégalité de Polyá-Szegő.

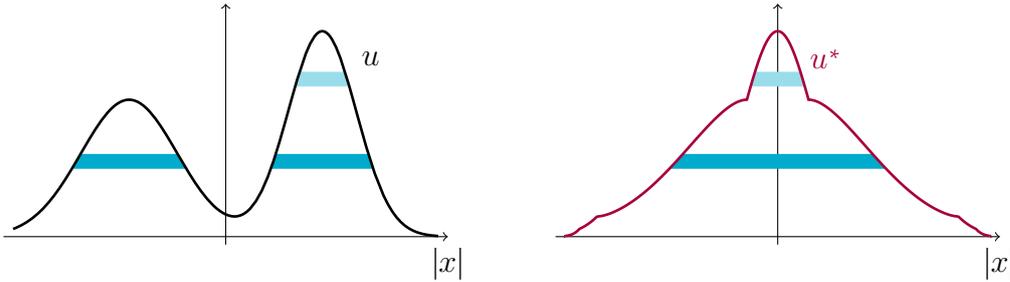


FIGURE 1 – Réarrangement symétrique décroissant.

Dans le deuxième chapitre, nous prouvons *qu'il existe* une solution radiale et positive de (EDP_Q) qui atteint le minimum global de \mathcal{J} . Ceci montre que l'équation (EDP_Q) des ondes solitaires et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

1. Comme il est d'usage, le terme « fonctionnelle » sera utilisé pour désigner des fonctions définies sur des espaces de fonctions.

fournissant des critères d'explosion sont intimement liées. Des *identités dites de l'énergie et de Pohožaev* relient entre elles les normes $\|Q\|_{L^2}$, $\|Q\|_{L^q}$ et $\|\nabla Q\|_{L^2}$ des solutions de l'équation (EDP_Q) . Nous en déduisons que *toutes les solutions* de l'équation (EDP_Q) sont des *points critiques* de \mathcal{J} . Afin de prouver ces identités, nous établissons un résultat de régularité en utilisant la « *méthode du bootstrap* $W^{k,p}$ ».

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de *propriétés qualitatives* des *solutions positives* de l'équation (EDP_Q) .² Un argument basé sur le *principe du maximum* implique que toutes les solutions positives de l'équation sont strictement positives sur \mathbb{R}^N . Grâce à la « *méthode du bootstrap* $C^{k,\theta}$ », nous prouvons ensuite que ces solutions sont de classe C^∞ . En utilisant la technique du « *moving plane* », nous montrons que *toutes les solutions* positives sont radiales, ce qui complète le résultat d'existence d'une solution radiale positive prouvé dans le deuxième chapitre. Nous prouvons ensuite *un résultat de décroissance exponentielle*. Nous mentionnons des résultats concernant *l'unicité* de la solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ positive de l'équation (EDP_Q) .

À la fin de ce mémoire, nous aurons établi qu'il existe une unique solution Q positive dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ à l'équation (EDP_Q) et que toutes les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui réalisent l'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg sont données par

$$u(x) = \mu Q(\lambda(x - x_0))$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Ces résultats permettent d'obtenir de nombreuses informations concernant l'équation (NLS) . Ainsi, dans le cas masse-critique $q = 2 + \frac{4}{N}$, on montre en exprimant la constante optimale dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg en fonction de $\|Q\|_{L^2}$ que toute fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifie l'inégalité

$$\mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \left(1 - \frac{\|u\|_{L^2}^{4/N}}{\|Q\|_{L^2}^{4/N}} \right)$$

où Q est l'unique solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ radiale positive de l'équation (EDP_Q) pour $q = 2 + \frac{4}{N}$ (voir [43]*Section 3).

Les lois de conservation de la masse et de l'énergie impliquent que la solution de l'équation (NLS) pour une condition initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ telle que $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ est globale et bornée uniformément en temps dans $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.

La condition $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ est optimale : il existe des solutions explosives lorsque $\|u_0\|_{L^2} \geq \|Q\|_{L^2}$. En effet, en appliquant une « transformation pseudo-

2. Par convention, le terme « solutions positives » exclut la solution nulle.

conforme » (voir [14, 23, 39]) à la solution $e^{it}Q(x)$, on obtient la solution explicite

$$s(t, \cdot) := \left(\frac{T}{T-t}\right)^{N/2} Q\left(\frac{xT}{T-t}\right) \exp\left(i\left(\frac{Tt}{T-t} - \frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)\right).$$

Cette solution vérifie l'égalité $\|s(t, \cdot)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ pour tout $t \in [0, T[$ et $\|\nabla s(t, \cdot)\|_{L^2} \sim \frac{1}{T-t}$ (i.e. il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que $\frac{c_1}{T-t} \leq \|\nabla s(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \frac{c_2}{T-t}$) où T est le temps d'explosion. D'après un résultat de F. Merle (voir [30]), il s'agit de l'unique solution explosive telle que $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, aux invariances de l'équation près.

Depuis les années 1970, des simulations numériques et des expansions asymptotiques formelles ont permis d'étudier le comportement des solutions explosives dans le cas $\|u_0\|_{L^2} > \|Q\|_{L^2}$. Suite à ces travaux, il a été suspecté (voir l'introduction de [18] et [37]) que des solutions explosant au régime

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \left(\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t}\right)^{1/2} \quad (\text{log-log})$$

existent. En 2000, G. Perelman a montré l'existence de telles solutions en dimension 1 (voir [34]).

Quelques années plus tard, F. Merle et P. Raphaël ont montré dans la série d'articles [31, 33, 32], que *toutes* les conditions initiales u_0 de norme L^2 légèrement supérieure à $\|Q\|_{L^2}$ et d'énergie négative donnaient lieu à des solutions explosant en temps fini selon le régime (log-log) (voir aussi [11] pour une présentation de ces résultats).

Les résultats de Merle et Raphaël sont conditionnels à la validité d'une *propriété spectrale* concernant la coercivité de formes quadratiques définies à partir de la solution Q de (EDP $_Q$) sur un espace de codimension finie de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément, ces formes quadratiques sont définies par $\varepsilon \mapsto (L_1\varepsilon | \varepsilon)_{L^2}$ et $\varepsilon \mapsto (L_2\varepsilon | \varepsilon)_{L^2}$ où

$$L_1 := -\Delta + \frac{2}{N} \left(\frac{4}{N} + 1\right) Q^{\frac{4}{N}-1} r \partial_r Q, \quad L_2 := -\Delta + \frac{2}{N} Q^{\frac{4}{N}-1} r \partial_r Q$$

et $r := |x|$ (rappelons que la fonction Q est radiale).

La propriété spectrale a été vérifiée en dimension $N = 1$ où la solution Q de (EDP $_Q$) vaut $Q(x) = 3^{1/4}(\cosh(2x))^{-1/2}$. Sa preuve en dimension $N \geq 2$ n'est pas aisée, notamment car aucune expression explicite de Q n'est connue. Des expériences numériques concernant les estimées de coercivité ont été réalisées dans [18] jusqu'en dimension $N = 4$ et dans [46] jusque $N = 10$.

Une analyse supplémentaire est nécessaire afin de développer des preuves assistées par ordinateur de la propriété spectrale. L'étude des solutions de l'équation (EDP $_Q$) présentée dans ce mémoire, en particulier de la solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ radiale positive, est indispensable avant d'entamer un tel travail.

Concluons cette introduction par quelques remarques.

- Bien que l'équation de Schrödinger porte sur des fonctions à valeurs complexes, nous étudions l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et l'équation (EDP_Q) pour des fonctions à valeurs réelles. Les techniques et résultats présentés dans ce mémoire se généralisent au cas complexe. Ainsi, les techniques « variationnelles » du deuxième chapitre peuvent être utilisées sur $H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$. En prenant le module des fonctions, on peut se ramener à l'étude des solutions positives comme nous le faisons en passant à la valeur absolue pour les fonctions à valeurs réelles.
- Nous utilisons les conventions présentées dans la table de notations (voir la page **v**).
- L'annexe **A** présente des résultats concernant les fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact, la convolution et les espaces de Sobolev utilisés intensivement dans ce mémoire. Nous renvoyons à cette annexe lors de la première utilisation de certaines définitions et propriétés de base concernant ces espaces et renvoyons systématiquement à l'annexe pour les résultats plus avancés.
- L'annexe **B** contient quelques résultats de principe du maximum qui jouent un grand rôle dans le troisième chapitre. Ces résultats ont été présentés dans un cours donné par Colette De Coster à l'UMONS [16].

Chapitre I

Réarrangement symétrique décroissant

Dans ce chapitre, nous présenterons des procédés de symétrisation d'ensembles et de fonctions, en suivant principalement l'ouvrage de M. Willem [44, Section 8.3] ainsi que les notes introductives de A. Burchard [10].

Avant de pouvoir symétriser des fonctions, nous devons déterminer comment il est possible de quantifier « la taille des ensembles de niveau » d'une fonction positive définie sur \mathbb{R}^N et expliquer en quel sens les processus de symétrisation préservent la taille de ces ensembles de niveau.

Nous étudierons ensuite le procédé de *réarrangement symétrique décroissant* (ou *symétrisation*) et son comportement pour des fonctions continues et différentiables ainsi que pour des fonctions positives dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Nous verrons que la symétrisation de Schwarz préserve les normes L^2 des fonctions.

L'objectif principal du chapitre est d'étudier ce procédé dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ (voir la définition A.24) et de prouver l'inégalité de Pólya-Szegő (théorème I.70) affirmant que la symétrisation de Schwarz diminue la norme L^2 du gradient des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

En suivant l'approche présentée par M. Willem dans [44, Section 8.3], nous étudierons d'abord une autre procédure de symétrisation : la *polarisation*. Nous prouverons l'inégalité de Pólya-Szegő en approximant la symétrisation par des polarisations, en un sens que l'on précisera dans la section I.5.

Cette démarche présente plusieurs intérêts.

- La polarisation est une procédure de symétrisation importante, notamment dans ses applications à la théorie des équations aux dérivées partielles (voir [42]).
- Le résultat d'approximation de la symétrisation par des polarisations est un résultat récent dû à J. Van Schaftingen (voir [41]) mais sa preuve est

néanmoins assez courte et ne requiert pas trop d'outils techniques.

- Nous pourrions ainsi obtenir une preuve « auto-contenue » de l'inégalité de Pólya-Szegő sans techniques de théorie géométrique de la mesure et sans inégalités isopérimétriques. Pour en savoir plus sur les procédés de symétrisation et le contexte général de l'inégalité, nous renvoyons le lecteur à [10].

Dans ce chapitre, nous utiliserons des notions de théorie de la mesure. Les résultats dont nous aurons besoin sont par exemple présentés dans [26].

I.1 Symétrisation de Schwarz des sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^N

Définition I.1. La *symétrisation de Schwarz* d'un ensemble mesurable $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est définie par

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x|^N \text{Vol}(B(0, 1)) < \text{Vol}(A)\}$$

où Vol désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N .

Remarque I.2. D'après la définition,

- si $\text{Vol}(A) = 0$ alors A^* est vide ;
- si $0 < \text{Vol}(A) < +\infty$ alors A^* est la boule ouverte centrée en 0 et ayant le même volume que A ;
- si $\text{Vol}(A) = +\infty$ alors A^* est égal à \mathbb{R}^N .

Remarque I.3. Il est clair que si A et B sont deux sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^N , alors

$$A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*.$$

Notation I.4. On note \mathcal{F}^* la famille d'ensembles définie par

$$\mathcal{F}^* := \{\emptyset\} \cup \{B(0, r) \mid r > 0\} \cup \{\mathbb{R}^N\}.$$

Remarque I.5. Cette famille est composée des ensembles qui peuvent être obtenus par symétrisation. Elle vérifie les propriétés ci-dessous.

- Tous les ensembles de \mathcal{F}^* sont mesurables.
- Étant donnés deux ensembles $A, B \in \mathcal{F}^*$, on a $A \subseteq B$ si et seulement si $\text{Vol}(A) \leq \text{Vol}(B)$. De plus, on a

$$\text{Vol}(A \cap B) = \min(\text{Vol}(A), \text{Vol}(B)). \quad (\text{I.1})$$

- La famille \mathcal{F}^* est stable par union quelconque.
- Deux éléments distincts de \mathcal{F}^* ont des volumes distincts.

Proposition I.6. *Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ sont deux ensembles mesurables, alors*

$$\text{Vol}(A \cap B) \leq \text{Vol}(A^* \cap B^*).$$

Démonstration. Puisque les ensembles A^* et B^* appartiennent à \mathcal{F}^* , on a

$$\text{Vol}(A^* \cap B^*) = \min(\text{Vol}(A^*), \text{Vol}(B^*)) = \min(\text{Vol}(A), \text{Vol}(B))$$

d'après l'égalité (I.1) et vu que la symétrisation préserve le volume. De plus,

$$\text{Vol}(A \cap B) \leq \text{Vol}(A) \quad \text{et} \quad \text{Vol}(A \cap B) \leq \text{Vol}(B).$$

Dès lors,

$$\text{Vol}(A \cap B) \leq \min(\text{Vol}(A), \text{Vol}(B)) = \text{Vol}(A^* \cap B^*). \quad \square$$

Proposition I.7. *Si $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^N$ est une suite croissante d'ensembles mesurables, alors*

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n^* = \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right)^*.$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord que si $(E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^N$ est une suite croissante d'ensembles mesurables, alors

$$\text{Vol} \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n \right) = \sup_{n \geq 1} \text{Vol}(E_n). \quad (\text{I.2})$$

Dans notre cas, $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(A_n^*)_{n \geq 1}$ sont deux suites croissantes d'ensembles mesurables. Dès lors, pour tout $n \geq 1$, on obtient

$$\text{Vol} \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^* \right) = \sup_{n \geq 1} \text{Vol}(A_n^*) = \sup_{n \geq 1} \text{Vol}(A_n) = \text{Vol} \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \text{Vol} \left(\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right)^* \right)$$

où on a utilisé l'égalité (I.2) avec $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(A_n^*)_{n \geq 1}$ et le fait que la symétrisation préserve le volume.

Les ensembles $(\bigcup_{n \geq 1} A_n^*)$ et $(\bigcup_{n \geq 1} A_n)^*$ appartiennent à la famille \mathcal{F}^* car les A_n^* appartiennent à la famille \mathcal{F}^* et que celle-ci est stable par union. On conclut car deux éléments distincts de \mathcal{F}^* ont des volumes distincts. \square

I.2 Mesures de l'image d'une fonction

I.2.1 Mesure push-forward et théorème de changement de variables

Définition I.8. Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable positive (notons que la valeur $+\infty$ est autorisée). La *mesure push-forward* λ_u de la mesure de Lebesgue par u est définie par

$$\lambda_u(A) := \text{Vol}(u^{-1}(A)) \quad \text{pour } A \subseteq [0, +\infty] \text{ mesurable.}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une mesure borélienne sur $[0, +\infty]$.

Remarque I.9. Dans le cadre des probabilités, le terme associé à celui de *mesure push-forward* est celui de *loi d'une variable aléatoire*.

Proposition I.10. Deux fonctions $u, v : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables égales presque partout engendrent la même mesure push-forward.

Démonstration. Soit $A \subseteq [0, +\infty]$ un ensemble mesurable. D'après l'inclusion

$$u^{-1}(A) \setminus v^{-1}(A) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) \neq v(x)\},$$

l'ensemble $u^{-1}(A) \setminus v^{-1}(A)$ est Lebesgue-négligeable. Il en est de même pour $v^{-1}(A) \setminus u^{-1}(A)$. Donc $u^{-1}(A)$ et $v^{-1}(A)$ sont égaux à un ensemble négligeable près, d'où $\lambda_u(A) = \lambda_v(A)$. \square

Rappelons ci-dessous la propriété fondamentale de la mesure push-forward.

Théorème I.11 (Changement de variables). Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ et $f : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)) \, dx = \int_{[0, +\infty]} f(t) \, d\lambda_u(t)$$

où les intégrales sont prises au sens de Lebesgue et où l'égalité est valable *y compris* quand elles valent $+\infty$.

Nous nous basons sur la preuve de [26, Proposition 8.1.1].

Démonstration. Supposons d'abord que $f = \mathbb{1}_A$ est l'indicatrice d'un ensemble mesurable $A \subseteq [0, +\infty]$. Dès lors, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A(u(x)) \, dx = \text{Vol}(u^{-1}(A)) = \lambda_u(A) = \int_{[0, +\infty]} \mathbb{1}_A(t) \, d\lambda_u(t).$$

Par linéarité, on en déduit que cette égalité est vérifiée pour toute fonction étagée positive. Puisque toute fonction mesurable positive est limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives (voir [26, Proposition 2.1.2]), le résultat est également valable pour toute fonction mesurable positive f d'après le théorème de convergence monotone. \square

Remarque I.12. Dans un contexte probabiliste, le théorème précédent est appelé « théorème de transfert » ou « théorème de transport » (car la mesure push-forward a été « transportée » du domaine \mathbb{R}^N vers $[0, +\infty]$ par u).

I.2.2 Sur-ensembles de niveau, décomposition layer-cake et fonction de distribution

Définition I.13. Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction positive. Les *sur-ensembles de niveau* de u sont définis par

$$\{u > t\} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) > t\}$$

pour un paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Remarque I.14. Plusieurs propriétés peuvent être exprimées en termes de sur-ensembles de niveau.

- Une fonction positive u est déterminée par ses sur-ensembles de niveau selon l'égalité

$$u(x) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x \in \{u > t\}\}. \quad (\text{I.3})$$

Même si u est positive, il faut prendre le supremum pour t appartenant à \mathbb{R} afin de traiter le cas des x tels que $u(x) = 0$ pour lesquels x n'appartient à aucun ensemble $\{u > t\}$ avec $t \geq 0$.

- Une fonction positive est mesurable si et seulement si ses sur-ensembles de niveau le sont aussi.
- Deux fonctions mesurables positives u et v sont égales presque partout si et seulement si leurs sur-ensembles de niveau sont égaux à un ensemble négligeable près.

Le sens direct de l'affirmation est clair. Pour le sens réciproque, nous pouvons réécrire l'égalité (I.3) appliquée à u et à v comme

$$u(x) = \sup\{t \in \mathbb{Q} \mid x \in \{u > t\}\}, \quad v(x) = \sup\{t \in \mathbb{Q} \mid x \in \{v > t\}\}.$$

Donc u et v sont égales presque partout car une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

- Une fonction positive est semi-continue inférieurement¹ si et seulement si ses sur-ensembles de niveau sont ouverts pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition I.15 (Décomposition « layer-cake »). *Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est une application mesurable positive et si $x \in \mathbb{R}^N$, alors l'application*

$$[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty] : t \mapsto \mathbb{1}_{\{u > t\}}(x)$$

est mesurable et on a

$$u(x) = \int_{[0, +\infty]} \mathbb{1}_{\{u > t\}}(x) dt.$$

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{1}_{\{u > t\}}(x) = \mathbb{1}_{[0, u(x)[}(t). \tag{I.4}$$

On en déduit que l'application $t \mapsto \mathbb{1}_{\{u > t\}}(x)$ est mesurable puisqu'il s'agit de l'indicatrice de l'intervalle $[0, u(x)[$ et que les intervalles sont mesurables. En intégrant l'égalité (I.4) sur $[0, +\infty]$, on obtient

$$\int_{[0, +\infty]} \mathbb{1}_{\{u > t\}}(x) dt = \int_{[0, +\infty]} \mathbb{1}_{[0, u(x)[}(t) dt = u(x). \quad \square$$

Définition I.16. Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable positive. La *fonction de distribution* de u est définie par

$$\mu_u(t) := \lambda_u(]t, +\infty]) = \text{Vol}(\{u > t\}) \in [0, +\infty]$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$.

1. Rappelons qu'une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement en un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ si et seulement si $\liminf_{x \rightarrow x_0} u(x) \geq u(x_0)$. Elle est dite semi-continue inférieurement sur \mathbb{R}^N si elle l'est en tout point de \mathbb{R}^N .

Remarque I.17. La terminologie « fonction de distribution » est employée dans les textes parlant de la symétrisation (voir [44, 10]). Elle diffère de la terminologie des probabilités où le terme « fonction de distribution » désigne généralement l'application $t \mapsto \mathbb{P}[X \leq t]$.

Proposition I.18. *L'application*

$$\mu_u : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty] : t \mapsto \mu_u(t)$$

est décroissante et mesurable.

Démonstration. Si $0 \leq s \leq t < +\infty$, alors on a

$$\{u > t\} \subseteq \{u > s\}$$

d'où

$$\mu_u(t) = \text{Vol}(\{u > t\}) \leq \text{Vol}(\{u > s\}) = \mu_u(s).$$

Pour la mesurabilité, on remarque que l'image réciproque d'un intervalle de $[0, +\infty]$ par μ_u est un intervalle, en particulier un sous-ensemble mesurable de $[0, +\infty[$. \square

Définition I.19. Une fonction positive $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est dite *admissible* si elle est mesurable et si ses sur-ensembles de niveau strictement positifs sont de mesure finie i.e. si pour tout $t > 0$, on a $\mu_u(t) < +\infty$.

Proposition I.20. *Si deux fonctions admissibles $u, v : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ ont les mêmes fonctions de distribution, alors leurs mesures push-forward λ_u et λ_v coïncident sur $]0, +\infty[$.*

Afin de prouver la proposition précédente, nous utiliserons le résultat de théorie de la mesure ci-dessous (voir [26, Corollaire 1.4.2] pour une preuve).

Proposition I.21 (Un critère d'unicité de mesures). *Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) . On suppose qu'il existe une classe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ stable par intersections finies telle que la sigma-algèbre engendrée par \mathcal{C} est égale à \mathcal{A} et telle que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$. S'il existe une suite croissante $(X_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ telle que $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ et telle que $\mu(X_n) = \nu(X_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$, alors $\mu = \nu$.*

Démonstration de la proposition I.20. Posons $\mathcal{C} := \{]t, +\infty[\mid t > 0\}$.

Par hypothèse, les mesures push-forward λ_u et λ_v coïncident sur \mathcal{C} . La sigma-algèbre engendrée par \mathcal{C} est égale à la sigma-algèbre des boréliens $\mathcal{B}(]0, +\infty[)$.

De plus, la famille d'ensembles définie par $(E_n)_{n \geq 1} := (] \frac{1}{n}, +\infty[)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ est telle que $\bigcup_{n \geq 1} E_n =]0, +\infty[$ et on a $\lambda_u(E_n) = \lambda_v(E_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Il en découle que λ_u et λ_v sont égales sur $\mathcal{B}(]0, +\infty[)$ d'après le critère d'unicité de mesures précédent (proposition I.21). \square

Remarque I.22. L'hypothèse d'admissibilité est importante dans la proposition I.20. En effet, dans le cas $N = 1$, les fonctions

$$u(x) := 2 \quad \text{et} \quad v(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ont toutes les deux une fonction de distribution donnée par

$$\mu_u(t) = \mu_v(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t < 2, \\ 0 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Par contre, elles n'ont pas la même mesure push-forward car

$$\lambda_u(\{1\}) = 0 \neq +\infty = \lambda_v(\{1\}).$$

Remarque I.23. Les mesures push-forward ne coïncident en général pas sur $[0, +\infty[$ à cause du poids de 0. En effet, dans le cas $N = 1$, les fonctions

$$u(x) := \begin{cases} 1/|x| & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad v(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ +\infty & \text{si } x = 0, \\ 2/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ont la même fonction de distribution mais leurs mesures push-forward ne coïncident pas sur $[0, +\infty[$. En effet, si $t \geq 0$, alors on a

$$u(x) > t \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v(x) > t \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } x < \frac{2}{t} \right).$$

Dès lors, on a $\mu_u(t) = \mu_v(t) = \frac{2}{t}$ pour tout $t \geq 0$. De plus, les mesures λ_u et λ_v ne sont pas égales sur $[0, +\infty[$ puisque $\lambda_u(\{0\}) = 0 \neq +\infty = \lambda_v(\{0\})$.

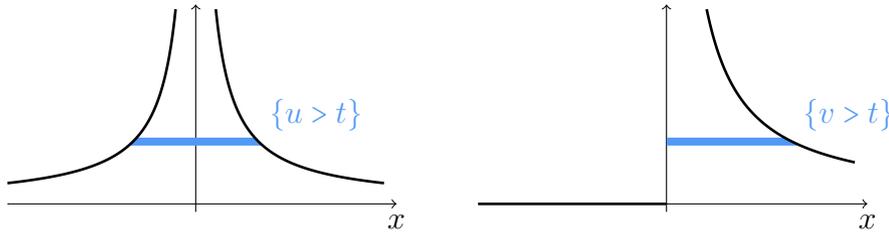


FIGURE I.1 – Les fonctions u et v de la remarque I.23 et deux sur-ensembles de niveau.

I.2.3 Lien entre la mesure push-forward, la fonction de distribution et l'intégration

Proposition I.24. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty]$ une fonction croissante, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $f(0) = 0$. Puisque f est croissante, on peut étendre f à $[0, +\infty]$ en posant

$$f(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

où la limite existe au sens large et appartient à $[0, +\infty]$.

Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction admissible alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)) \, dx = \int_{]0, +\infty[} f(t) \, d\lambda_u(t) = \int_{]0, +\infty[} f'(s) \mu_u(s) \, ds,$$

où ces intégrales sont comprises au sens de Lebesgue. Le résultat est valable y compris quand elles valent $+\infty$.

Démonstration. D'après l'égalité $f(0) = 0$ et le théorème de changement de variables (théorème I.11), on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)) \, dx = \int_{]0, +\infty[} f(t) \, d\lambda_u(t).$$

Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ et que $f(0) = 0$, on a pour tout $t \in]0, +\infty[$ l'égalité

$$f(t) = \int_{]0, t[} f'(s) \, ds. \quad (\text{I.5})$$

Puisque f est croissante, on a $f'(s) \geq 0$ pour tout $s \in [0, +\infty[$. En utilisant le

théorème de Fubini pour les fonctions positives, on conclut que

$$\begin{aligned}
 \int_{]0,+\infty]} f(t) \, d\lambda_u(t) &= \int_{]0,+\infty]} \left(\int_{]0,t[} f'(s) \, ds \right) \, d\lambda_u(t) \\
 &= \int_{]0,+\infty[} f'(s) \left(\int_{]s,+\infty]} 1 \, d\lambda_u(t) \right) \, ds \\
 &= \int_{]0,+\infty[} f'(s) \lambda_u(]s,+\infty]) \, ds \\
 &= \int_{]0,+\infty[} f'(s) \mu_u(s) \, ds. \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarque I.25. L'hypothèse de croissance sur la fonction f n'est pas essentielle dans la proposition I.24. Elle permet d'utiliser le théorème de Fubini pour les fonctions positives ce qui autorise f à prendre des valeurs infinies.

Corollaire I.26 (Principe de Cavalieri). *Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive, alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \, dx = \int_{]0,+\infty[} \mu_u(t) \, dt.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition I.24 avec $f(t) = t$. □

I.3 Symétrisation des fonctions admissibles

I.3.1 Définitions et premières propriétés

Théorème I.27. *Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction admissible. Il existe une unique fonction positive u^* dont les sur-ensembles de niveau sont donnés pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\{u^* > t\} = \{u > t\}^*$.*

Démonstration. L'unicité se déduit du fait qu'une fonction positive est déterminée par ses sur-ensembles de niveau.

Afin de prouver l'existence, on définit

$$u^*(x) := \sup \{t \in \mathbb{R} \mid x \in \{u > t\}^*\},$$

cette écriture étant motivée par l'égalité (I.3).

Étant donné $t \in \mathbb{R}$, montrons que l'égalité $\{u^* > t\} = \{u > t\}^*$ est vérifiée. Prouvons les deux inclusions séparément.

- Si $x \in \{u^* > t\}$, c'est-à-dire si $u^*(x) > t$, alors il existe $s > t$ tel que x appartient à $\{u > s\}^*$ par définition de u^* en tant que supremum. Dès lors, x appartient à $\{u > t\}^*$ puisque l'inclusion $\{u > s\} \subseteq \{u > t\}$ implique que $\{u > s\}^* \subseteq \{u > t\}^*$.
- D'après la proposition I.7, on a

$$\{u > t\}^* = \left(\bigcup_{s>t} \{u > s\} \right)^* = \bigcup_{s>t} \{u > s\}^*.$$

Si $x \in \{u > s\}^*$, alors $u^*(x) \geq s$ par définition de u^* en tant que supremum, donc $u^*(x) > t$ car $s > t$. Dès lors, on a $\{u > t\}^* \subseteq \{u^* > t\}$. \square

Définition I.28. La fonction u^* du théorème précédent est appelée *symétrisation (de Schwarz)* de u .

Remarque I.29. Les propriétés listées ci-dessous sont vérifiées.

- La symétrisation de Schwarz est compatible avec la symétrisation des ensembles car, pour tout ensemble mesurable $A \subseteq \mathbb{R}^N$, on a $\mathbb{1}_{A^*} = (\mathbb{1}_A)^*$.
- La symétrisée u^* est une fonction radiale décroissante, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a $|x| \leq |y| \Rightarrow u^*(x) \geq u^*(y)$.
En particulier u est radiale, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a $|x| = |y| \Rightarrow u^*(x) = u^*(y)$.
- Deux fonctions égales presque partout ont la même symétrisée de Schwarz.

Proposition I.30. Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction admissible alors sa symétrisée de Schwarz u^* est semi-continue inférieurement et pour tout $t > 0$, on a $\mu_u(t) = \mu_{u^*}(t)$.

Démonstration. Par définition de u^* , $\{u^* > t\}$ est égal à $\{u > t\}^*$ qui est une boule ouverte. Les sur-ensembles de niveau de u^* sont donc ouverts et u^* est semi-continue inférieurement. De plus, on a

$$\mu_u(t) = \text{Vol}(\{u > t\}) = \text{Vol}(\{u > t\}^*) = \text{Vol}(\{u^* > t\}) = \mu_{u^*}(t). \quad \square$$

Proposition I.31. Soient $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ et $f : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables. Si on suppose que $f(0) = 0$ ou que u est strictement positive, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u^*(x)) \, dx.$$

Démonstration. La proposition I.30 implique que les fonctions u et u^* ont la même fonction de distribution. D'après la proposition I.20, leurs mesures push-forward λ_u et λ_{u^*} coïncident sur $]0, +\infty]$. En utilisant le théorème de changement de variables (théorème I.11), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)) \, dx = \int_{]0, +\infty]} f(t) \, d\lambda_u(t) = \int_{]0, +\infty]} f(t) \, d\lambda_{u^*}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u^*(x)) \, dx$$

car $f(0) = 0$ ou $u > 0$ et $u^* > 0$. \square

Remarque I.32. L'hypothèse « $f(0) = 0$ » est nécessaire dans la proposition précédente. En effet, si u et v sont les fonctions de la remarque I.23, alors les fonctions u et v^* sont égales mais pour $f(t) = \mathbb{1}_{\{0\}}(t)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)) \, dx = 0 \neq +\infty = \int_{\mathbb{R}^N} f(v(x)) \, dx.$$

I.3.2 Pseudo-inverse de μ_u

Définition I.33. Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est une application mesurable positive, le *pseudo-inverse* de sa fonction de distribution μ_u est défini pour tout $s \geq 0$ par

$$\mu_u^\#(s) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu_u(t) > s\}.$$

La proposition suivante permet d'exprimer la symétrisée d'une fonction u à partir du pseudo-inverse de sa fonction de distribution.

Proposition I.34. Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est une application admissible, alors on a

$$u^*(x) = \mu_u^\#(\text{Vol}(B(0, 1))|x|^N).$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in \{u^* > t\} \iff \mu_u(t) > \text{Vol}(B(0, 1))|x|^N$$

puisque $\mu_u(t) = \text{Vol}(\{u^* > t\})$ et que $\{u^* > t\}$ appartient à \mathcal{F}^* . Dès lors,

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x \in \{u > t\}^*\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu_u(t) > \text{Vol}(B(0,1))|x|^N\} \\ &= \mu_u^\#(\text{Vol}(B(0,1))|x|^N). \end{aligned} \quad \square$$

I.3.3 Symétrisation des fonctions L^2 positives

Notation I.35 (Fonctions $L^2(\mathbb{R}^N)$ positives). Notons

$$L_+^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid u \text{ est positive}\}.$$

Proposition I.36 (Conservation des normes L^2). Soit $u \in L_+^2(\mathbb{R}^N)$. La fonction u^* appartient à $L_+^2(\mathbb{R}^N)$ et on a $\|u^*\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$.

Remarque I.37. D'après la remarque I.29, deux fonctions égales presque partout ont la même symétrisée de Schwarz. La symétrisation est donc bien définie sur L_+^2 .

Démonstration. Il est clair que les fonctions symétrisées sont positives. Pour prouver l'égalité des normes L^2 , il suffit d'appliquer la proposition I.31 à la fonction $f(t) := t^2$ (étendue par $f(+\infty) = +\infty$). \square

Le théorème ci-dessous affirme que la symétrisation de Schwarz augmente le produit scalaire L^2 entre les fonctions de $L_+^2(\mathbb{R}^N)$.

Théorème I.38 (Hardy-Littlewood). Soient $u, v \in L_+^2(\mathbb{R}^N)$. Alors, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)v^*(x) \, dx.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. D'après la décomposition « layer-cake » (voir la proposition I.15), on a

$$u(x)v(x) = \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{u>s\}}(x) \, ds \right) \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{v>t\}}(x) \, dt \right).$$

Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{u>s\}}(x) \, ds \right) \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{v>t\}}(x) \, dt \right) \, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\{u>s\} \cap \{v>t\}}(x) \, dx \right) \, ds \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{Vol}(\{u > s\} \cap \{v > t\}) \, ds \, dt \tag{I.6}
\end{aligned}$$

par le théorème de Fubini pour les fonctions positives. De même, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)v^*(x) \, dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{Vol}(\{u^* > s\} \cap \{v^* > t\}) \, ds \, dt. \tag{I.7}$$

Par définition de la symétrisation, les égalités

$$\{u^* > s\} = \{u > s\}^* \text{ et } \{v^* > t\} = \{v > t\}^*$$

sont satisfaites pour tout $s, t \geq 0$. D'après la proposition I.6, on obtient

$$\text{Vol}(\{u > s\} \cap \{v > t\}) \leq \text{Vol}(\{u^* > s\} \cap \{v^* > t\}). \tag{I.8}$$

L'inégalité de Hardy-Littlewood se déduit des égalités (I.6) et (I.7) et de l'inégalité (I.8). \square

De ce qui précède, nous pouvons déduire que la symétrisation de Schwarz diminue la distance L^2 entre les fonctions de $L^2_+(\mathbb{R}^N)$.

Proposition I.39. *Si $u, v \in L^2_+(\mathbb{R}^N)$, alors on a*

$$\|u^* - v^*\|_{L^2} \leq \|u - v\|_{L^2}.$$

En particulier, la symétrisation de Schwarz est une application continue de $L^2_+(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même.

Démonstration. Soient $u, v \in L^2_+(\mathbb{R}^N)$. Par la conservation des normes L^2 et l'inégalité de Hardy-Littlewood, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u^* - v^*\|_{L^2}^2 &= \|u^*\|_{L^2}^2 + \|v^*\|_{L^2}^2 - 2(u^* | v^*)_{L^2} \\
&= \|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - 2(u^* | v^*)_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - 2(u | v)_{L^2} \\
&= \|u - v\|_{L^2}^2. \tag{I.9}
\end{aligned}$$

\square

I.3.4 Symétrisation et régularité

Proposition I.40. *Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue, admissible, alors $u^* : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ est continue.*

Remarque I.41. Dans cet énoncé, la continuité de u^* est à comprendre au sens de $[0, +\infty]$ (avec la notion de convergence vers l'infini). La fonction u^* peut prendre des valeurs infinies même si ce n'est pas le cas de u , par exemple si u n'est pas bornée alors $u^*(0) = +\infty$.

Démonstration. Considérons l'image de u , donnée par

$$I := \{u(x) \mid x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Puisque u est continue, I est un intervalle de $[0, +\infty[$. L'infimum de I vaut 0. En effet sinon il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $u(x) \geq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, ce qui est impossible car u est admissible.

Montrons tout d'abord que l'application

$$\mu_u : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: t \mapsto \mu_u(t)$$

est strictement décroissante sur I . Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ tels que $u(x_1) < u(x_2)$. On veut montrer que $\mu_u(u(x_1)) > \mu_u(u(x_2))$. La fonction

$$[0, 1] \rightarrow [0, +\infty[: s \mapsto u((1-s)x_1 + sx_2)$$

est continue et est telle que $u(0) = u(x_1)$ et $u(1) = u(x_2)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel s pour lequel $u((1-s)x_1 + sx_2) = \frac{u(x_1) + u(x_2)}{2}$. Par continuité de u en $p_s := (1-s)x_1 + sx_2$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(p_s, \delta)$, on a $u(x_1) < u(x) < u(x_2)$. Dès lors, $B(p_s, \delta) \subseteq \{u > x_1\}$ et $B(p_s, \delta) \cap \{u > x_2\} = \emptyset$. Donc, on a

$$\mu_u(u(x_1)) = \text{Vol}(\{u > x_1\}) \geq \text{Vol}(B(p_s, \delta)) + \text{Vol}(\{u > x_2\}) > \mu_u(u(x_2)).$$

D'après ce qui précède, μ_u est strictement décroissante sur I .

On considère $\mu_u^\#$, le pseudo-inverse de μ_u . La stricte décroissance de μ_u implique que $\mu_u^\#$ est continue de $[0, +\infty]$ dans $[0, +\infty]$. D'après la proposition I.34, on a

$$u^*(x) = \mu_u^\#(\text{Vol}(B(0, 1))|x|^n)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et on en déduit que u^* est continue de \mathbb{R}^N dans $[0, +\infty]$. \square

L'exemple suivant montre que la symétrisation ne préserve pas la régularité \mathcal{C}^k pour $k \geq 1$.

Exemple I.42. Plaçons-nous en dimension $N = 1$. Soit $u(x) := e^{x^2-x^4}$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Nous verrons qu'elle est admissible. En effet, nous allons déterminer explicitement sa fonction de distribution μ_u et nous constaterons que $\mu_u(t) < +\infty$ pour tout $t > 0$. De plus, nous montrerons que la symétrisée u^* de u n'est pas dérivable en $x = -1$ et en $x = 1$.

Soient $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{x^2-x^4} > t &\iff x^2 - x^4 > \ln(t) \\ &\iff x^4 - x^2 + \ln(t) < 0. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Considérons l'inéquation du second degré $X^2 - X + \ln(t) < 0$ et son discriminant $\Delta = 1 - 4\ln(t)$.

- Si $\ln(t) \geq \frac{1}{4}$ (c'est-à-dire si $t \geq e^{\frac{1}{4}}$), alors $a^2 - a + \ln(t) \geq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et l'inéquation (I.9) n'a aucune solution.
- Sinon, l'inéquation (I.9) est satisfaite si et seulement si

$$x^2 \in \left] \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \right[.$$

Dès lors,

- si $0 \leq \ln(t) < \frac{1}{4}$ (c'est-à-dire si $1 \leq t < e^{\frac{1}{4}}$), alors l'ensemble des solutions de l'inéquation (I.9) est donné par

$$\left] -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}}, -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}} \right[\cup \left] \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}}, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}} \right];$$

- si $\ln(t) < 0$ (c'est-à-dire si $t < 1$), l'ensemble des solutions de l'inégalité est donné par

$$\left] -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}}, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}} \right[.$$

Ainsi, la fonction de distribution μ_u est donnée par

$$\mu_u(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0, \\ \sqrt{2 \cdot (1 + \sqrt{1 - 4\ln(t)})} & \text{si } 0 < t < 1, \\ \sqrt{2 \cdot (1 + \sqrt{1 - 4\ln(t)})} - \sqrt{2 \cdot (1 - \sqrt{1 - 4\ln(t)})} & \text{si } 1 \leq t < e^{\frac{1}{4}}, \\ 0 & \text{si } e^{\frac{1}{4}} \leq t. \end{cases}$$

D'après cette expression, μ_u est une bijection strictement décroissante entre $]0, e^{1/4}[$ et $]0, +\infty[$. De plus, cette fonction n'est pas dérivable en $t = 1$.

Dès lors, $\mu_u^\#$ (qui est donnée sur $]0, +\infty[$ par la fonction réciproque de μ_u) n'est pas dérivable en $\mu_u(1) = 2$. On en déduit que $u^*(x) = \mu_u^\#(2|x|)$ (car $\text{Vol}[-1, 1] = 2$) n'est dérivable ni en $x = -1$ ni en $x = 1$ (voir la figure I.2).

Par conséquent, la fonction symétrisée u^* est continue mais pas dérivable sur son domaine. On observe ainsi un phénomène de perte de régularité puisque u est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

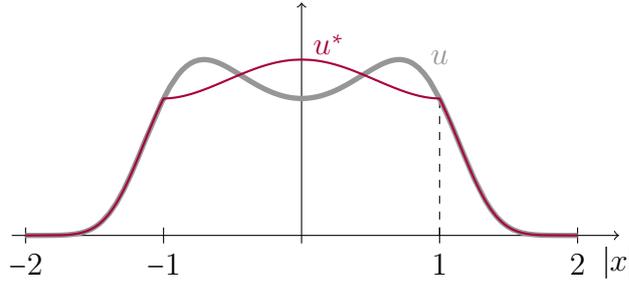


FIGURE I.2 – Non-régularité de la symétrisée de Schwarz.

I.4 Polarisations

I.4.1 Réflexions orthogonales

Proposition I.43 (Réflexions orthogonales). *Considérons l'hyperplan affiné de \mathbb{R}^N défini par $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot \xi = t\}$ où $\xi \in \mathbb{S}(0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ et \cdot désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N .*

Tout $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit de façon unique comme $x = p + s\xi$ où $p \in \Pi$ et $s \in \mathbb{R}$. Explicitement, s est donné par $s = x \cdot \xi - t$.

La réflexion orthogonale par rapport à Π est l'application σ_Π envoyant $p + s\xi$ sur $p - s\xi$ pour tout $p \in \Pi$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors σ_Π est une application affine et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sigma_\Pi(x) = x - 2(x \cdot \xi - t)\xi.$$

Démonstration. Étant donné $x \in \mathbb{R}^N$ et $s \in \mathbb{R}$, on a

$$x - s\xi \in \Pi \iff (x - s\xi) \cdot \xi = t \iff x \cdot \xi - s = t \iff s = x \cdot \xi - t$$

d'où

$$\sigma_\Pi(x) = (x - (x \cdot \xi - t)\xi) - (x \cdot \xi - t)\xi = x - 2(x \cdot \xi - t)\xi. \quad \square$$

Définition I.44. Un *demi-espace affín fermé* de \mathbb{R}^N est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \cdot x \leq b\}$$

où $a \in \mathbb{S}(0, 1)$ et $b \in \mathbb{R}$.

Remarque I.45. Le bord de H est l'hyperplan affín donné par

$$\partial H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \cdot x = b\}.$$

Notation I.46. Nous noterons \mathcal{H}_0 l'ensemble des demi-espaces affíns fermés de \mathbb{R}^N qui contiennent 0.

I.4.2 Définition et premières propriétés des polarisations

Définition I.47. Soit H un demi-espace affín fermé. La *polarisation par rapport à H* d'une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$u^H(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(\sigma_{\partial H}(x))\} & \text{si } x \in H, \\ \min\{u(x), u(\sigma_{\partial H}(x))\} & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus H. \end{cases}$$

Remarque I.48. Contrairement à la symétrisation de Schwarz, il n'y a pas besoin d'hypothèse de positivité sur la fonction u pour définir la polarisation par rapport à un demi-espace affín fermé.

Notation I.49. Soient un naturel $k \geq 1$, des demi-espaces affíns fermés H_1, \dots, H_k et une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. On notera $u^{H_1 \cdots H_k}$ la fonction obtenue à partir de u en polarisant successivement par rapport à H_1, \dots, H_k .

Remarque I.50. En général, $u^{H_1 \cdots H_k}$ n'est pas égal à $u^{H_k \cdots H_1}$. Ceci est lié à la non-commutativité des réflexions orthogonales. On se place dans \mathbb{R}^2 et on considère deux demi-espaces affíns fermés définis par

$$H_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1\}, \quad H_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0\}.$$

On considère la fonction $u(x) = \mathbb{1}_{\{(1,1)\}}$. Alors, on a

$$u^{H_1}(x) = \mathbb{1}_{\{(1,1)\}}, \quad u^{H_1 H_2}(x) = u^{H_2}(x) = \mathbb{1}_{\{(1,-1)\}}, \quad u^{H_2 H_1}(x) = \mathbb{1}_{\{(-1,1)\}}.$$

Définition I.51. Soient H un demi-espace affiné fermé et $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un ensemble. La *polarisation* de A par rapport à H est l'unique ensemble A^H tel que $\mathbb{1}_{A^H} = (\mathbb{1}_A)^H$.

Les polarisations vérifient les propriétés suivantes.

- Si la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors u^H l'est également.
- Si l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est mesurable, alors l'ensemble A^H est également mesurable et a le même volume que A .
- Les sur-ensembles de niveau de u^H sont donnés par

$$\{u^H > t\} = \{u > t\}^H$$

pour tout $t > 0$. En particulier, si u est une fonction mesurable positive, alors les fonctions u et u^H ont la même fonction de distribution.

- Si u est admissible, alors $(u^H)^* = u^*$ (d'après les deux points précédents). Si de plus $H \in \mathcal{H}_0$, alors $(u^*)^H = u^*$ (car u^* est radialement décroissante).
- Si u appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors u^H appartient également à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on a $\|u\|_\infty = \|u^H\|_\infty$.

Prouvons tout d'abord deux inégalités élémentaires.

Proposition I.52 (Inégalité de réarrangement à deux variables). Si a, b, c, d sont quatre réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, alors on a

$$ad + bc \leq ac + bd.$$

Il y a égalité si et seulement si $a = b$ ou $c = d$.

Remarque I.53. Bien que l'inégalité précédente soit fréquemment appelée « inégalité de réarrangement », il ne s'agit pas de réarrangement au sens de ce chapitre mais au sens de l'ordre des nombres réels.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (b - a)(d - c) \geq 0. \quad \square$$

Proposition I.54. *Si a, b, c, d sont quatre réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, alors on a*

$$(b - d)^2 + (a - c)^2 \leq (a - d)^2 + (b - c)^2.$$

Il y a égalité si et seulement si $a = b$ ou $c = d$.

Démonstration. En développant les carrés parfaits et en regroupant les termes, l'inégalité se réécrit $ad + bc \leq ac + bd$. On conclut d'après l'inégalité de réarrangement à deux variables (voir la proposition I.52). \square

Tout comme pour la symétrisation de Schwarz (voir les propositions I.36 et I.39), la polarisation préserve les normes L^2 et diminue les distances L^2 entre les éléments de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Proposition I.55 (Polarisations dans $L^2(\mathbb{R}^N)$). *Soient H un demi-espace affiné fermé de \mathbb{R}^N et $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors les fonctions u^H et v^H appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^N)$ et on a*

$$\|u^H\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}, \quad \|u^H - v^H\|_{L^2} \leq \|u - v\|_{L^2}.$$

En particulier, pour tout demi-espace affiné fermé H , l'application

$$L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N) : u \mapsto u^H$$

est continue.

Démonstration. Pour tout $x \in H$, on a

$$u(x)^2 + u(\sigma_{\partial H}(x))^2 = (u^H(x))^2 + (u^H(\sigma_{\partial H}(x)))^2$$

En effet,

- soit $u^H(x) = u(x)$ et $u^H(\sigma_{\partial H}(x)) = u(\sigma_{\partial H}(x))$;
- soit $u^H(x) = u(\sigma_{\partial H}(x))$ et $u^H(\sigma_{\partial H}(x)) = u(x)$.

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)^2 \, dx &= \int_H \left(u(x)^2 + u(\sigma_{\partial H}(x))^2 \right) dx \\ &= \int_H \left((u^H(x))^2 + (u^H(\sigma_{\partial H}(x)))^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (u^H(x))^2 \, dx. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|u^H\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$.

À présent, montrons que pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} (u^H(x) - v^H(x))^2 + (u^H(\sigma_{\partial H}(x)) - v^H(\sigma_{\partial H}(x)))^2 \\ \leq (u(x) - v(x))^2 + (u(\sigma_{\partial H}(x)) - v(\sigma_{\partial H}(x)))^2. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Distinguons quatre cas.

- Si $u^H(\sigma_{\partial H}(x)) = u(\sigma_{\partial H}(x)) \leq u(x) = u^H(x)$:
 - Si $v^H(\sigma_{\partial H}(x)) = v(\sigma_{\partial H}(x)) \leq v(x) = v^H(x)$, il y a égalité dans l'inégalité (I.10).
 - Si $v^H(\sigma_{\partial H}(x)) = v(x) \leq v(\sigma_{\partial H}(x)) = v^H(x)$, on applique l'inégalité (I.54) avec $a = u(\sigma_{\partial H}(x))$, $b = u(x)$, $c = v(x)$ et $d = v(\sigma_{\partial H}(x))$.
- Si $u^H(\sigma_{\partial H}(x)) = u(x) \leq u(\sigma_{\partial H}(x)) = u^H(x)$:
 - Si $v^H(\sigma_{\partial H}(x)) = v(\sigma_{\partial H}(x)) \leq v(x) = v^H(x)$, on applique l'inégalité (I.54) avec $a = u(x)$, $b = u(\sigma_{\partial H}(x))$, $c = v(\sigma_{\partial H}(x))$ et $d = v(x)$.
 - Si $v^H(\sigma_{\partial H}(x)) = v(x) \leq v(\sigma_{\partial H}(x)) = v^H(x)$, il y a égalité dans l'inégalité (I.10).

Finalement, on obtient

$$\|u^H - v^H\|_{L^2} \leq \|u - v\|_{L^2}$$

en intégrant l'inégalité (I.10) sur H . □

Une propriété importante des polarisations est de diminuer le module de continuité.

Proposition I.56. *Si une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors la fonction $u^H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ l'est également et pour tout réel $\delta \in]0, +\infty[$, on a*

$$\omega_{u^H}(\delta) \leq \omega_u(\delta),$$

où le module de continuité de u est donné par

$$\omega_u(\delta) := \sup\{|u(x) - u(y)| \mid x, y \in \mathbb{R}^N, |x - y| \leq \delta\}.$$

Prouvons d'abord une inégalité élémentaire.

Lemme I.57. *Si a, b, c, d sont quatre nombres réels, alors on a*

$$|\max(a, b) - \max(c, d)| \leq \max(|a - c|, |b - d|).$$

De même, on a

$$|\min(a, b) - \min(c, d)| \leq \max(|a - c|, |b - d|).$$

Démonstration du lemme I.57. Puisque

$$a = c + (a - c), \quad b = d + (b - d), \quad c = a + (c - a), \quad d = b + (d - b),$$

on a

$$\begin{aligned} \min(c, d) - \max(|a - c|, |b - d|) &\leq a \leq \max(c, d) + \max(|a - c|, |b - d|), \\ \min(c, d) - \max(|a - c|, |b - d|) &\leq b \leq \max(c, d) + \max(|a - c|, |b - d|), \\ \min(a, b) - \max(|a - c|, |b - d|) &\leq c \leq \max(a, b) + \max(|a - c|, |b - d|), \\ \min(a, b) - \max(|a - c|, |b - d|) &\leq d \leq \max(a, b) + \max(|a - c|, |b - d|). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \max(a, b) &\leq \max(c, d) + \max(|a - c|, |b - d|), \\ \max(c, d) &\leq \max(a, b) + \max(|a - c|, |b - d|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \min(c, d) - \max(|a - c|, |b - d|) &\leq \min(a, b), \\ \min(a, b) - \max(|a - c|, |b - d|) &\leq \min(c, d) \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Nous aurons également besoin d'un lemme géométrique.

Lemme I.58. *Soit H un demi-espace affín fermé de \mathbb{R}^N et $x \in H$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus H$, on a*

$$|x - \sigma_{\partial H}(y)| \leq |x - y|.$$

Démonstration du lemme I.58. Quitte à effectuer une translation et une rotation des variables, on peut supposer que H est donné par

$$H = \{(x_1, x') \mid x_1 \geq 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}.$$

On a $x_1 \geq 0$ et $y_1 < 0$ car x appartient à H et y appartient à $\mathbb{R}^N \setminus H$. On écrit $y = (y_1, y')$ avec $y_1 \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Puisque $\sigma_{\partial H}(y) = (-y_1, y')$, on a

$$\begin{aligned} |x - \sigma_{\partial H}(y)|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x' - y')^2, \\ |x - y|^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x' - y')^2. \end{aligned}$$

Dès lors, l'inégalité

$$|x - \sigma_{\partial H}(y)| \leq |x - y|$$

est équivalente à l'inégalité

$$(x_1 + y_1)^2 \leq (x_1 - y_1)^2.$$

Cette dernière inégalité se réécrit comme $4x_1y_1 \leq 0$. Elle est vérifiée puisque $y_1 \leq 0$ et $x_1 \geq 0$. \square

On peut maintenant passer à la preuve de la proposition I.56.

Démonstration de la proposition I.56. Soient $\delta \in]0, +\infty[$ et $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $|x - y| \leq \delta$. On distingue deux cas.

- Si $x, y \in H$ ou si $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus H$ alors le lemme I.57 implique que

$$|u^H(x) - u^H(y)| \leq \max(|u(x) - u(y)|, |u(\sigma_{\partial H}(x)) - u(\sigma_{\partial H}(y))|).$$

On en déduit que

$$|u^H(x) - u^H(y)| \leq \omega_u(\delta)$$

puisque

$$|\sigma_{\partial H}(x) - \sigma_{\partial H}(y)| = |x - y| \leq \delta,$$

et par définition du module de continuité.

- Sinon, quitte à échanger les rôles de x et y , on a $x \in H$ et $y \in \mathbb{R}^N \setminus H$. Dans ce cas, le lemme I.58 implique que

$$|x - \sigma_{\partial H}(y)| = |\sigma_{\partial H}(x) - y| \leq |\sigma_{\partial H}(x) - \sigma_{\partial H}(y)| = |x - y| \leq \delta.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |u^H(x) - u^H(y)| &\leq \max(|u(x) - u(\sigma_{\partial H}(y))|, |u(\sigma_{\partial H}(x)) - u(y)|, \\ &\quad |u(x) - u(y)|, |u(\sigma_{\partial H}(x)) - u(\sigma_{\partial H}(y))|) \\ &\leq \omega_u(\delta) \end{aligned}$$

par définition du module de continuité.

Dans les deux cas, on a montré que

$$\omega_{u^H}(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |u^H(x) - u^H(y)| \leq \omega_u(\delta). \quad \square$$

I.4.3 Polarisations dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$

Théorème I.59 (Gradient d'une polarisation sur $H^1(\mathbb{R}^N)$). *Soient H un demi-espace affiné fermé de \mathbb{R}^N et $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction. Alors u^H appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ et son gradient ∇u^H est donné par*

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\{u \geq u \circ \sigma_{\partial H}\} \cap \text{int } H} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u < u \circ \sigma_{\partial H}\} \cap \text{int } H} \nabla (u \circ \sigma_{\partial H}) \\ & + \mathbb{1}_{\{u \geq u \circ \sigma_{\partial H}\} \setminus H} \nabla (u \circ \sigma_{\partial H}) + \mathbb{1}_{\{u < u \circ \sigma_{\partial H}\} \setminus H} \nabla u. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

De plus, on a l'égalité $\|\nabla u^H\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}$.

Avant de prouver ce théorème, rappelons le résultat d'intégration suivant (voir [9, Theorem 4.9]).

Proposition I.60. *Soient Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^N , une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$ et une fonction $f \in L^p(\Omega)$. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1} \subseteq (f_n)_{n \geq 1}$ et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que :*

- la suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge presque partout vers f sur Ω ;
- pour tout $k \geq 1$, on a $|f_{n_k}(x)| \leq |h(x)|$ presque partout sur Ω .

Démonstration du théorème I.59. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Quitte à faire une translation et un changement de variables linéaire (cette étape est justifiée pour les dérivées faibles d'après les propositions A.23 et A.34), on peut supposer que H est donné par $H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 \geq 0\}$. Dans le reste de la preuve, on décomposera les vecteurs $x \in \mathbb{R}^N$ en $x = (x_1, x')$ où $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x' = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. La réflexion orthogonale $\sigma_{\partial H}$ est donnée par $\sigma_{\partial H}(x_1, x') = (-x_1, x')$. Afin d'utiliser des notations plus suggestives, on note

$$\{x_1 > 0\} := \text{int } H = \{(x_1, x') \mid x_1 > 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}\},$$

de même pour $\{x_1 \geq 0\} := H$ et $\{x_1 = 0\} := \partial H$.

On pose $v(x_1, x') := u(-x_1, x')$. Étant donné $1 \leq i \leq N$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on

veut montrer que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i \varphi(x) \, dx &= - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i u(x) \varphi(x) \, dx \\
 &\quad - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i v(x) \varphi(x) \, dx \\
 &\quad - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 < 0\}} \partial_i v(x) \varphi(x) \, dx \\
 &\quad - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 < 0\}} \partial_i u(x) \varphi(x) \, dx. \tag{I.12}
 \end{aligned}$$

La définition des polarisations fait intervenir des définitions « par morceaux ».

- Sur $\{x_1 \geq 0\}$, la définition de u^H contient un maximum :

$$u^H(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) \geq u(\sigma_{\partial H}(x)), \\ u(\sigma_{\partial H}(x)) & \text{si } u(x) < u(\sigma_{\partial H}(x)). \end{cases}$$

La proposition [A.33](#) concerne les dérivées faibles du maximum de deux fonctions et permet donc de traiter cet aspect. Remarquons que cette définition par morceaux ne dépend que des valeurs de $u(x)$.

- La polarisation est définie par morceaux sur $\{x_1 \geq 0\}$ et $\{x_1 < 0\}$:

$$u^H(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(\sigma_{\partial H}(x))\} & \text{si } x_1 \geq 0, \\ \min\{u(x), u(\sigma_{\partial H}(x))\} & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Cette fois, la définition par morceaux dépend explicitement de x et pas uniquement des valeurs prises par u .

Il faut s'assurer qu'il n'y a pas de problèmes au bord de $\{x_1 \geq 0\}$. Notre stratégie consiste à distinguer les cas « loin de $\{x_1 = 0\}$ » et « près de $\{x_1 = 0\}$ » en utilisant un argument de troncature.

Pour une raison technique, nous supposons dans un premier temps que u est continue à support compact dans \mathbb{R}^N . Nous étendons ensuite l'égalité (I.12) à toutes les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ par densité.

Ainsi, supposons pour l'instant que u est une fonction continue à support compact. Dans ce cas, les fonctions v et u^H sont également continues à support compact (voir la proposition [I.56](#) concernant la polarisation des fonctions continues).

▷ **Étape 1 Introduction d'une suite de partitions de l'unité**

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction nulle sur $]-\infty, 1]$, strictement croissante sur $[1, 2]$

et valant 1 sur $[2, +\infty[$ (une telle fonction existe d'après la proposition A.3).
Considérons la fonction

$$\theta(x_1) := 1 - \psi(x_1) - \psi(-x_1).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, s'annule sur $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, vaut 1 sur $[-1, 1]$ et est telle que $0 \leq \theta \leq 1$. Finalement, définissons pour tout $n \geq 1$

$$\xi_n(x_1, x') := \psi(nx_1), \quad \tilde{\xi}_n(x_1, x') := \psi(-nx_1), \quad \theta_n(x_1, x') := \theta(nx_1).$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $1 = \xi_n + \tilde{\xi}_n + \theta_n$.

▷ *Étape 2* **Problème loin de l'hyperplan** $\{x_1 = 0\}$

Soit $n \geq 1$. Puisque le support de ξ_n est inclus dans $\{x_1 > 0\}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i (\xi_n(x) \varphi(x)) dx = \int_{\{x_1 > 0\}} \max(u(x), v(x)) \partial_i (\xi_n(x) \varphi(x)) dx.$$

Vu que les fonctions u et v appartiennent à $H^1(\mathbb{R}^N)$, leurs restrictions à $\{x_1 > 0\}$ appartiennent à $H^1(\{x_1 > 0\})$. D'après la proposition A.33, la fonction $\max(u, v)$ appartient à $H^1(\{x_1 > 0\})$ et pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\partial_i (\max(u, v)) = \mathbb{1}_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i u + \mathbb{1}_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i v$$

sur $\{x_1 > 0\}$. Puisque $\xi_n \varphi$ appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\{x_1 > 0\})$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\{x_1 > 0\}} \max(u(x), v(x)) \partial_i (\xi_n(x) \varphi(x)) dx \\ &= - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i u(x) \xi_n(x) \varphi(x) dx - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i v(x) \xi_n(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i (\xi_n(x) \varphi(x)) dx \\ &= - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i u(x) \xi_n(x) \varphi(x) dx - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i v(x) \xi_n(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

La suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ converge ponctuellement vers 1 sur $\{x_1 > 0\}$ et est telle que $0 \leq \xi_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i (\xi_n(x) \varphi(x)) dx \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i u(x) \varphi(x) dx - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i v(x) \varphi(x) dx. \quad (\text{I.13}) \end{aligned}$$

De façon semblable, on montre que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i(\tilde{\xi}_n(x)\varphi(x)) \, dx \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 < 0\}} \partial_i u(x) \varphi(x) \, dx - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 < 0\}} \partial_i v(x) \varphi(x) \, dx. \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

▷ *Étape 3 Problème près de l'hyperplan* $\{x_1 = 0\}$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i(\theta_n(x)\varphi(x)) \, dx.$$

En dérivant le produit, nous obtenons $\partial_i(\theta_n\varphi) = (\partial_i\theta_n)\varphi + \theta_n(\partial_i\varphi)$. Puisque $0 \leq \theta_n \leq 1$, que φ est à support compact et que $(\theta_n)_{n \geq 1}$ converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}^N \setminus \{x_1 = 0\}$, le théorème de convergence dominée implique que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \theta_n(x) \partial_i\varphi(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{I.15})$$

À présent, montrons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \varphi(x) \partial_i\theta_n(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Si $i \neq 1$, la fonction $\partial_i\theta_n$ est nulle car θ_n ne dépend que de x_1 . Il reste donc à montrer que

$$n \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} u^H(x_1, x') \varphi(x_1, x') \theta'(nx_1) \, dx_1 \, dx' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En posant $y := nx_1$, on obtient

$$\begin{aligned} n \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} u^H(x_1, x') \varphi(x_1, x') \theta'(nx_1) \, dx_1 \, dx' \\ = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{[-2,2]} u^H(y/n, x') \varphi(y/n, x') \theta'(y) \, dy \, dx'. \end{aligned}$$

Puisque la fonction u est continue à support compact, u^H l'est également (voir la proposition I.56), d'où²

$$u^H(y/n, x') \varphi(y/n, x') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^H(0, x') \varphi(0, x')$$

2. Remarquons que la continuité de u^H est importante dans ce passage à la limite. Ceci explique pourquoi nous supposons que u est continue à support compact dans la première partie de la preuve.

pour tout $y \in [-2, 2]$ et tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. D'après le résultat de convergence ponctuelle précédent et puisque la fonction φ est continue à support compact, le théorème de convergence dominée implique que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{[-2,2]} u^H(y/n, x') \varphi(y/n, x') \theta'(y) dy dx' \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{[-2,2]} u^H(0, x') \varphi(0, x') \theta'(y) dy dx'. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{[-2,2]} u^H(0, x') \varphi(0, x') \theta'(y) dy dx' \\ = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u^H(0, x') \varphi(0, x') \left(\int_{[-2,2]} \theta'(y) dy \right) dx' \end{aligned}$$

et cette dernière intégrale est nulle puisque $\theta(2) - \theta(-2) = 0$.

Ainsi, nous avons montré que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \varphi(x) \partial_i \theta_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{I.16})$$

pour tout $1 \leq i \leq N$. D'après (I.15) et (I.16), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i (\theta_n(x) \varphi(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{I.17})$$

▷ **Étape 4 Synthèse des deux étapes précédentes**

En réunissant (I.13), (I.14) et (I.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u^H(x) \partial_i \left((\xi_n(x) + \tilde{\xi}_n(x) + \theta_n(x)) \varphi(x) \right) dx \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i u(x) \varphi(x) dx - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} \partial_i v(x) \varphi(x) dx \\ - \int_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 < 0\}} \partial_i v(x) \varphi(x) dx - \int_{\{u < v\} \cap \{x_1 < 0\}} \partial_i u(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Puisque $\xi_n(x) + \tilde{\xi}_n(x) + \theta_n(x) = 1$, nous avons prouvé l'égalité (I.12) lorsque u est continue à support compact.

▷ **Étape 5 Prolongement par densité**

Nous devons maintenant étendre le résultat à $H^1(\mathbb{R}^N)$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ (voir la proposition A.37), il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} u \quad \text{et} \quad \partial_i u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \partial_i u \quad (i = 1, \dots, N).$$

Grâce à la proposition I.60, nous pouvons supposer, quitte à passer à une sous-suite, que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge presque partout vers u et qu'il existe une fonction $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $|u_n| \leq h$ et $|\partial_i u_n| \leq h$ pour tout $1 \leq i \leq N$ presque partout.

On pose $v_n := u_n \circ \sigma_{\partial H}$. Quitte à remplacer h par $\max(h, h \circ \sigma_{\partial H})$, on peut supposer que $|v_n| \leq h$ presque partout. De plus, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers $v := u \circ \sigma_{\partial H}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Par continuité des polarisations sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (voir la proposition I.55), la suite $(u_n^H)_{n \geq 1}$ converge vers u^H dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. De plus, vu que les fonctions u_n sont continues à support compact, nous savons d'après l'étape 4 que $\partial_i u_n^H$ est égal à

$$(\mathbb{1}_{\{u_n \geq v_n\} \cap \{x_1 > 0\}} + \mathbb{1}_{\{u_n < v_n\} \cap \{x_1 < 0\}}) \partial_i u_n + (\mathbb{1}_{\{u_n < v_n\} \cap \{x_1 > 0\}} + \mathbb{1}_{\{u_n \geq v_n\} \cap \{x_1 < 0\}}) \partial_i v_n. \quad (\text{I.18})$$

On en déduit la majoration

$$|\partial_i u_n^H| \leq 4h. \quad (\text{I.19})$$

D'après l'expression (I.18), la suite $(\partial_i u_n^H)_{n \geq 1}$ converge presque partout vers

$$w := (\mathbb{1}_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 > 0\}} + \mathbb{1}_{\{u < v\} \cap \{x_1 < 0\}}) \partial_i u + (\mathbb{1}_{\{u < v\} \cap \{x_1 > 0\}} + \mathbb{1}_{\{u \geq v\} \cap \{x_1 < 0\}}) \partial_i v.$$

La majoration (I.19) et le théorème de convergence dominée impliquent que la suite $(\partial_i u_n^H)_{n \geq 1}$ converge vers w dans L^2 .

En résumé, la suite $(u_n^H)_{n \geq 1}$ converge vers u^H dans L^2 et la suite $(\partial_i u_n^H)_{n \geq 1}$ converge vers w dans L^2 . En particulier, ces deux convergences ont lieu au sens des distributions. Par conséquent, w est la dérivée faible de u^H selon i (voir le lemme A.27).

▷ Étape 6 Conclusion

Pour tout $x_1 > 0$ et tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, on a

$$|\nabla u^H(x_1, x')|^2 + |\nabla u^H(-x_1, x')|^2 = |\nabla u(x_1, x')|^2 + |\nabla u(-x_1, x')|^2.$$

En intégrant cette égalité pour $x_1 \in]0, +\infty[$ et $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, on conclut que $\|\nabla u^H\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}$. \square

Remarque I.61. D'après la proposition A.33, les fonctions $\mathbb{1}_{\{u = u \circ \sigma_{\partial H}\}} \nabla u$ et $\mathbb{1}_{\{u = u \circ \sigma_{\partial H}\}} \nabla(u \circ \sigma_{\partial H})$ sont égales presque partout. Ainsi, le gradient de u^H peut (par exemple) se réécrire comme

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\{u > u \circ \sigma_{\partial H}\} \cap \text{int } H} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u \leq u \circ \sigma_{\partial H}\} \cap \text{int } H} \nabla(u \circ \sigma_{\partial H}) \\ & + \mathbb{1}_{\{u > u \circ \sigma_{\partial H}\} \setminus H} \nabla(u \circ \sigma_{\partial H}) + \mathbb{1}_{\{u \leq u \circ \sigma_{\partial H}\} \setminus H} \nabla u. \end{aligned}$$

Par contre, on ne peut pas utiliser des inégalités strictes dans toutes les indicatrices. En effet, si $u = u \circ \sigma_{\partial H}$ (c'est-à-dire si u est symétrique par rapport à ∂H), alors les fonctions $\mathbb{1}_{\{u > u \circ \sigma_{\partial H}\}}$ et $\mathbb{1}_{\{u < u \circ \sigma_{\partial H}\}}$ sont nulles presque partout.

I.5 Approximation de la symétrisation par une suite de polarisations

L'objet de cette section consiste à prouver le résultat ³ suivant.

Théorème I.62 (J. Van Schaftingen 2009). *Soit une suite $(H_n)_{n \geq 1}$ de demi-espaces affins fermés définie pour tout $n \geq 1$ par*

$$H_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a_n \cdot x \leq b_n\}$$

où les suites $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{S}(0, 1)$ et $(b_n)_{n \geq 1} \subseteq]0, +\infty[$ sont telles que l'ensemble $\{(a_n, b_n) \mid n \geq 1\}$ est dense dans $\mathbb{S}(0, 1) \times]0, +\infty[$.

Soit $u \in L^2_+(\mathbb{R}^N)$. Alors la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 := u, \\ u_{n+1} := u_n^{H_1 \dots H_{n+1}} \end{cases}$$

converge vers u^ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque I.63. Par construction, u_n s'obtient en appliquant $\frac{n(n+1)}{2}$ polarisations à u_0 . Notons qu'on polarise $n+1-i$ fois par H_i pour obtenir u_n . De plus, remarquons que les polarisations à appliquer sont explicites et indépendantes de la fonction u .

Définition I.64 (Hyperplan médiateur). Soient x et y deux points distincts de \mathbb{R}^N . L'hyperplan médiateur du segment $[x, y]$ est l'hyperplan affiné orthogonal à ce segment et passant par le milieu de celui-ci.

Remarque I.65. Étant donné un demi-espace affiné fermé H et un point $x \in \mathbb{R}^N$, l'hyperplan ∂H est l'hyperplan médiateur du segment $[x, \sigma_{\partial H}(x)]$.

Lemme I.66 (Demi-espace associé à l'hyperplan médiateur). Soient x et y deux points distincts de \mathbb{R}^N . Soit H le demi-espace affiné fermé délimité par l'hyperplan médiateur du segment $[x, y]$ et contenant x , alors :

- 0 appartient à H si et seulement si $|x| \leq |y|$;

3. Ce résultat peut-être formulé pour L^2_+ et pas uniquement pour L^2 . Le lecteur pourra consulter avec intérêt l'article original [41] de Jean Van Schaftingen. Nous suivons ici la présentation du livre de Michel Willem [44].

- 0 appartient à $\text{int } H$ si et seulement si $|x| < |y|$;
- 0 appartient à ∂H si et seulement si $|x| = |y|$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} H &= \left\{ p \in \mathbb{R}^N \mid \left(p - \frac{x+y}{2} \right) \cdot (x-y) \geq 0 \right\}, \\ \text{int } H &= \left\{ p \in \mathbb{R}^N \mid \left(p - \frac{x+y}{2} \right) \cdot (x-y) > 0 \right\}, \\ \partial H &= \left\{ p \in \mathbb{R}^N \mid \left(p - \frac{x+y}{2} \right) \cdot (x-y) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad \square$$

Lemme I.67. Soient $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $H \in \mathcal{H}_0$. On pose $g(x) := e^{-|x|^2}$. Alors, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^H g \, dx. \quad (\text{I.20})$$

Si de plus 0 appartient à $\text{int } H$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u g \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^H g \, dx \quad (\text{I.21})$$

alors $u^H = u$.

Démonstration. Pour tout $x \in H$, on a $|x| \leq |\sigma_{\partial H}(x)|$ d'après le lemme I.66 car 0 appartient à H . On en déduit que $g(\sigma_{\partial H}(x)) \leq g(x)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} u^H(x) &= \max\{u(x), u(\sigma_{\partial H}(x))\} \\ u^H(\sigma_{\partial H}(x)) &= \min\{u(x), u(\sigma_{\partial H}(x))\}. \end{aligned}$$

On obtient

$$u(x)g(x) + u(\sigma_{\partial H}(x))g(\sigma_{\partial H}(x)) \leq u^H(x)g(x) + u^H(\sigma_{\partial H}(x))g(\sigma_{\partial H}(x)) \quad (\text{I.22})$$

par l'inégalité de réarrangement à deux variables. L'inégalité (I.20) se déduit de l'inégalité (I.22) en intégrant sur H .

Si l'égalité (I.21) est vérifiée, alors la fonction $(u^H - u)g$ est positive et d'intégrale nulle sur H . Dès lors, cette fonction est nulle presque partout sur H , autrement dit

$$u(x)g(x) + u(\sigma_{\partial H}(x))g(\sigma_{\partial H}(x)) = u^H(x)g(x) + u^H(\sigma_{\partial H}(x))g(\sigma_{\partial H}(x)) \quad (\text{I.23})$$

presque partout sur H . Si 0 appartient à $\text{int } H$, alors $g(\sigma_{\partial H}(x)) < g(x)$ pour tout $x \in H$ puisque $|x| < |\sigma_{\partial H}(x)|$ d'après le lemme I.66. Dès lors, u et u^H sont égales presque partout d'après l'égalité (I.23) et le cas d'égalité de l'inégalité de réarrangement à deux variables (voir la proposition I.52). \square

Lemme I.68. Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue à support compact strictement positive telle que pour tout $H \in \mathcal{H}_0$, on a $u^H = u$, alors $u^* = u$.

Démonstration. Soient deux points distincts $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $|x| \leq |y|$.

Considérons le demi-espace affine fermé H délimité par l'hyperplan médiateur du segment $[x, y]$ et contenant x . D'après le lemme I.66, H appartient à \mathcal{H}_0 et est tel que $y = \sigma_{\partial H}(x)$.

Puisque $u^H = u$, que x appartient à H , que $y = \sigma_{\partial H}(x)$ et par définition de la polarisation, on en déduit que

$$u(y) = u^H(y) \leq u^H(x) = u(x).$$

Par conséquent, u est radialement décroissante. Dès lors, pour tout $t > 0$, $\{u > t\}$ et $\{u^* > t\}$ sont des boules centrées en 0 et de même mesure. Donc u et u^* ont les mêmes sur-ensembles de niveau d'où $u = u^*$. \square

Passons à présent à la preuve du résultat d'approximation de la symétrisation par une suite de polarisations.

Démonstration du théorème I.62. Commençons par prouver le résultat pour des fonctions continues à support compact.

▷ **Étape 1 Utilisation du théorème d'Ascoli-Arzelà**

Soit u une fonction continue à support compact positive. Il existe $r > 0$ tel que le support de u est inclus dans $B[0, r]$. Par définition de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, le support de u_n est inclus dans $B[0, r]$ pour tout $n \geq 0$.

Remarquons que :

- pour tout $n \geq 0$, $\|u_n\|_\infty = \|u\|_\infty$ (car les polarisations préservent la norme infinie) ;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on a $\omega_{u_n}(\delta) \leq \omega_u(\delta) \leq \varepsilon$ car la polarisation diminue le module de continuité d'après la proposition I.56.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir [9, Theorem 4.25]), on en déduit qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 1} \subseteq (u_n)_{n \geq 1}$ qui converge uniformément vers une fonction continue v à support dans $B[0, r]$.

▷ **Étape 2 Identification de la limite v**

Montrons que $v = u^*$.

Puisque les fonctions u_{n_k} s'obtiennent en appliquant un nombre fini de polarisations à u , on a $u_{n_k}^* = u^*$ pour tout $k \geq 1$.

Dès lors, d'après la proposition I.39,

$$\|u^* - v^*\|_{L^2} = \|u_{n_k}^* - v^*\|_{L^2} \leq \|u_{n_k} - v\|_{L^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

car il y a convergence uniforme de u_{n_k} vers v et que les supports de toutes ces fonctions sont inclus dans $B[0, r]$. On en déduit que $u^* = v^*$. Il reste à montrer que $v = v^*$.

Soit $m \geq 1$. Pour tout k tel que $n_k \geq m$, on a par construction

$$u_{n_{k+1}} = u_{n_k}^{H_1 \cdots H_m \cdots H_{n_{k+1}}}.$$

En appliquant plusieurs fois le lemme I.67 à la fonction $u_{n_k}^{H_1 \cdots H_m}$ et aux demi-espaces affins fermés $H_{m+1}, \dots, H_{n_{k+1}}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_{n_k}^{H_1 \cdots H_m} g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_{n_{k+1}} g \, dx.$$

Notons que g appartient à L^2 . Puisque u_{n_k} converge vers v dans L^2 , on en déduit en appliquant plusieurs fois la proposition I.55 que $u_{n_k}^{H_1 \cdots H_m}$ converge vers $v^{H_1 \cdots H_m}$ dans L^2 . En passant à la limite pour $k \rightarrow \infty$ et par continuité du produit scalaire L^2 , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^{H_1 \cdots H_m} g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} v g \, dx.$$

Or, d'après le lemme I.67, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} v g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} v^{H_1 \cdots H_m} g \, dx.$$

On en déduit que pour tout $m \geq 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^{H_1 \cdots H_m} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} v g \, dx.$$

En utilisant cette dernière égalité, le cas d'égalité du lemme I.67 et par induction sur m , on montre que $v^{H^m} = v$ pour tout $m \geq 1$.

Soit $H \in \mathcal{H}_0$. On écrit $H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \cdot x \leq b\}$ pour $a \in \mathbb{S}(0, 1)$ et $b \geq 0$.

Par hypothèse, il existe une sous-suite $(a_{m_k}, b_{m_k})_{k \geq 1} \subseteq (a_n, b_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$(a_{m_k}, b_{m_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (a, b).$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\|v^H - v\|_{L^2} = \|v^H - v^{H_{m_k}}\|_{L^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par conséquent, $v = v^H$ pour tout $H \in \mathcal{H}_0$. En utilisant le lemme I.68, on conclut que $v = v^*$.

▷ *Étape 3 Conclusion*

Soient $u \in L^2_+(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de l'espace des fonctions continues à support compact dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ (voir [9, Theorem 4.12]), il existe une fonction w continue à support compact telle que $\|u - w\|_{L^2} \leq \varepsilon$. Quitte à remplacer w par $\max(w, 0)$, on peut supposer que w est positive. D'après l'étape précédente, la suite définie par

$$\begin{cases} w_0 := w, \\ w_{n+1} := w_n^{H_1 \dots H_{n+1}} \end{cases}$$

converge vers w^* dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Dès lors, il existe $m \geq 0$ tel que pour tout $n \geq m$, on a $\|w_n - w^*\|_{L^2} \leq \varepsilon$. D'après les propositions I.39 et I.55, on obtient pour tout $n \geq m$ que

$$\|u_n - u^*\|_{L^2} \leq \|u_n - w_n\|_{L^2} + \|w_n - w^*\|_{L^2} + \|w^* - u^*\|_{L^2} \leq 2\|u - w\|_{L^2} + \varepsilon \leq 3\varepsilon. \quad \square$$

I.6 Inégalité de Pólya–Szegő

Notation I.69 (Fonctions $H^1(\mathbb{R}^N)$ positives). Notons

$$H^1_+(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid u \text{ est positive}\}.$$

Théorème I.70 (Inégalité de Pólya–Szegő). *Soit $u \in H^1_+(\mathbb{R}^N)$. Alors u^* appartient à $H^1_+(\mathbb{R}^N)$ et on a $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$.*

Démonstration. Considérons une suite $((a_n, b_n))_{n \geq 1}$ dense dans $\mathbb{S}(0, 1) \times]0, +\infty[$. Alors, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie dans le théorème I.62 converge vers u^* dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \geq 0$, on a $\|\nabla u_n\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}$ en utilisant la proposition I.59 et vu que les fonctions u_n s'obtiennent en appliquant un nombre fini de polarisations à u .

D'après ce qui précède, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Elle possède donc une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge faiblement vers une certaine fonction $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. En particulier, $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers \tilde{u} au sens des distributions (voir la définition A.15) puisque pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, l'application

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x) dx$$

définit une forme linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, puisque $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ converge fortement vers u dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, elle converge vers u au sens des

distributions. On en déduit que la suite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ converge faiblement vers u dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Puisque la fonction $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ est convexe et continue sur $H^1(\mathbb{R}^N)$, elle est faiblement semi-continue inférieurement (voir [9, Corollary 3.9]), d'où

$$\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \lim \|\nabla u_n\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}. \quad \square$$

Remarque I.71. L'inégalité ne survient que lors de l'étape du passage à la limite dans la preuve précédente.

Chapitre II

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Dans ce chapitre, nous commencerons par montrer que les plongements de Sobolev entre les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ et certains espaces $L^q(\mathbb{R}^N)$ (voir le théorème A.41) ne sont jamais compacts suite à un *phénomène de perte de compacité par translations*.

Par contraste, nous prouverons que si $N \geq 2$, l'espace $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $H^1(\mathbb{R}^N)$ à symétrie radiale s'injecte *de façon compacte* dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in]2, 2^*[$ où

$$2^* = \begin{cases} \infty & \text{si } N = 2, \\ \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

est l'exposant critique des plongements de Sobolev.¹

Ce résultat se base sur un lemme de décroissance pour les fonctions radiales introduit par W. Strauss (voir [36, Section 3, Radial Lemma 1]). Nous suivrons la présentation de M. Willem dans [44, Chapitre 6, exercices 12, 13, 14] afin de prouver un résultat de densité puis de démontrer le lemme radial. Notre argument prouvant la compacité de l'injection est semblable à celui de P.L. Lions dans [27, Proposition I.1].

Nous verrons qu'il y a un phénomène de *perte de compacité par dilatations* dans les cas $q = 2$ et $q = 2^*$. Nous verrons également que l'espace $H_r^1(\mathbb{R})$ ne s'injecte de façon compacte dans aucun espace $L^p(\mathbb{R})$, ce qui explique pourquoi nous travaillerons en dimension $N \geq 2$ (voir la remarque II.7).

1. Nous ne considérerons que l'espace des fonctions $H^1(\mathbb{R}^N)$ radiales. Plus généralement, il existe des résultats similaires pour les espaces de fonctions $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ radiales, voir [44, Chapitre 6, exercices 12, 13, 14].

Nous poursuivrons par l'étude de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg qui affirme que pour tout $q \in]2, 2^*[$, il existe une constante $C_q > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{L^2}^{1-s} \|\nabla u\|_{L^2}^s,$$

pour toute fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et où $s := \frac{(q-2)N}{2q}$.

Notre objectif principal sera la détermination de la valeur optimale de C_q . Nous utiliserons des techniques de *calcul des variations*, en suivant l'article [43] de M.I. Weinstein. Les cas d'égalité dans l'inégalité correspondent à des minima globaux sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(u) := \frac{\|u\|_{L^2}^{q(1-s)} \|\nabla u\|_{L^2}^{qs}}{\|u\|_{L^q}^q}.$$

Nous verrons qu'il existe une fonction non nulle appartenant à $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ qui atteint le *minimum global* de \mathcal{J} sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ et qui est solution de l'équation

$$-\Delta Q + Q = |Q|^{q-2}Q. \quad (\text{EDP}_Q)$$

Réciproquement, nous montrerons que *toutes* les solutions de (EDP_Q) sont des *points critiques* de \mathcal{J} .

Dans ce but, nous étudierons les propriétés de *régularité* des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ de l'équation (EDP_Q) en utilisant la méthode du « bootstrap $W^{k,p}$ ». Nous montrerons que toutes ces solutions sont de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ et convergent vers 0 à l'infini ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

Grâce à ces propriétés de régularité, nous pourrons démontrer les *identités de l'énergie et de Pohožaev*, deux égalités importantes concernant les solutions de (EDP_Q) . Nous verrons que ces identités sont liées à l'effet des *homothéties et des dilatations* sur les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ces identités permettront de prouver que toutes les solutions de l'équation (EDP_Q) sont des points critiques de \mathcal{J} et d'introduire une notion de « ground states » pour l'équation (EDP_Q) . L'étude de ces solutions sera poursuivie dans le chapitre III.

Nous terminerons ce chapitre en présentant des résultats concernant le cas « $q = 2^*$ » pour lequel l'injection de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte. Ces résultats sont dus à G. Talenti (voir l'article [38]).

II.1 Plongements compacts

II.1.1 Pertes de compacité par translations

D'après le théorème de plongement de Sobolev, l'espace $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ se plonge dans certains espaces $L^q(\mathbb{R}^N)$ (voir le théorème A.41 pour un énoncé précis). Aucun de ces plongements n'est compact². En effet, soient ψ une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ non nulle et un vecteur $d \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Alors la suite

$$(\psi_n)_{n \geq 0} := (x \mapsto \psi(x + nd))_{n \geq 0}$$

converge vers 0 au sens des distributions (voir la définition A.15) puisque pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, les fonctions ψ_n et φ sont à supports disjoints si n est suffisamment grand, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(x) \varphi(x) dx = 0.$$

De plus, les fonctions ψ_n appartiennent à tous les espaces $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ car il s'agit de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty[$, on a

$$\|\psi_n\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} = \|\psi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} > 0.$$

Donc la suite $(\psi_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans tous les espaces $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ et n'admet de sous-suite fortement convergente dans aucun espace $L^q(\mathbb{R}^N)$. En effet, la limite devrait être à la fois nulle (d'après la convergence au sens des distributions) et de norme L^q non-nulle (puisque $\|\psi_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} > 0$ pour tout $q \in [1, \infty]$).

Sur un domaine borné, un tel phénomène de perte de compacité par translations ne peut pas se produire. Le théorème de Rellich-Kondrachov donne de la compacité dans les plongements de Sobolev pour des domaines bornés de classe \mathcal{C}^1 (voir le théorème A.45).

Un autre moyen d'obtenir de la compacité est d'utiliser des hypothèses de symétrie sur les fonctions qui empêchent le phénomène de perte de compacité par translations. Nous allons le voir dans le cas des espaces de fonctions radiales. Des résultats plus généraux existent, voir par exemple l'article [27].

2. Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ entre deux espaces vectoriels normés est dit compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq X$, la suite $(Tx_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergente dans Y .

II.1.2 Espaces de fonctions radiales

Définition II.1 (Espaces de fonctions radiales). On définit

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N) &:= \{u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \mid u \text{ est radiale}\}, \\ H_r^1(\mathbb{R}^N) &:= \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid u \text{ est radiale}\}.\end{aligned}$$

Remarque II.2. Précisons ce que nous entendons par « fonction radiale ». Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a $|x| = |y| \Rightarrow f(x) = f(y)$;
- il existe une fonction $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = F(|x|)$;
- la fonction f est invariante sous l'action de $O(N)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $g \in O(N)$, on a $f(g \cdot x) = f(x)$.

Si f vérifie une de ces assertions, f est dite radiale et la fonction F du second point est unique.

Nous dirons qu'une fonction f définie presque partout est radiale si pour tout $g \in O(N)$, les fonctions $x \mapsto f(g \cdot x)$ et $x \mapsto f(x)$ sont égales presque partout. Si une suite de fonctions $L^p(\mathbb{R}^N)$ radiales converge fortement dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ alors sa limite est également radiale. En particulier, l'espace $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ est fermé dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, donc $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Commençons par prouver un résultat de densité.

Lemme II.3. *L'espace $\mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H_r^1(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Soient $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, $(\rho_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ une suite d'unités approchées de convolution (voir la définition A.10 et l'exemple A.11 pour une construction) et $\xi \in \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction de troncature valant 1 sur $B[0, 1]$, nulle sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0, 2)$ et telle que $0 \leq \xi \leq 1$ (voir la proposition A.4 pour l'existence d'une telle fonction).

Alors la suite $(\xi(x/n)(\rho_n * u))_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ définie par troncature et régularisation converge vers u dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ (voir la proposition A.37).

De plus, les fonctions de cette suite sont radiales. En effet, si $g \in O(N)$

et si $x \in \mathbb{R}^N$, alors

$$\begin{aligned}
 v_n(g \cdot x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) u(y - g \cdot x) \, dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(g \cdot z) u(g \cdot (z - x)) \, dz && \text{(en posant } y := g \cdot z) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(z) u(z - x) \, dz && \text{(car } \rho_n \text{ et } u \text{ sont radiales)} \\
 &= v_n(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemme II.4 (Lemme radial). *Si $N \geq 2$, alors il existe $c(N) > 0$ tel que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on a*

$$|u(x)| \leq c(N) \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} |x|^{\frac{1-N}{2}}. \quad (\text{II.1})$$

Si de plus $N \geq 3$, alors il existe $d(N) > 0$ tel que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on a

$$|u(x)| \leq d(N) \|\nabla u\|_{L^2} |x|^{\frac{2-N}{2}}. \quad (\text{II.2})$$

Démonstration. Soient deux fonctions $u \in \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $U \in \mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty[; \mathbb{R})$ telles que $u(x) = U(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On a alors $|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N} = |U'(|x|)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Commençons par écrire $\|u\|_{L^2}$ et $\|\nabla u\|_{L^2}$ en termes de U puis intégrons en coordonnées sphériques (voir [26, Théorème 7.2.1]). On obtient

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \, dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}(0,1)} |U(r)|^2 r^{N-1} \, d\sigma_{\mathbb{S}(0,1)}(\omega) \, dr \\
 &= \sigma_{\mathbb{S}(0,1)}(\mathbb{S}(0,1)) \int_0^{+\infty} |U(r)|^2 r^{N-1} \, dr, \quad (\text{II.3})
 \end{aligned}$$

où $\sigma_{\mathbb{S}(0,1)}$ est la mesure usuelle sur la sphère unité. De façon analogue, on a

$$\begin{aligned}
 \|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}(0,1)} |U'(r)|^2 r^{N-1} \, d\sigma_{\mathbb{S}(0,1)}(\omega) \, dr \\
 &= \sigma_{\mathbb{S}(0,1)}(\mathbb{S}(0,1)) \int_0^{+\infty} |U'(r)|^2 r^{N-1} \, dr. \quad (\text{II.4})
 \end{aligned}$$

Pour tout $0 \leq r \leq s$, on a

$$U(s) - U(r) = \int_r^s U'(t) dt.$$

En faisant tendre s vers $+\infty$ et vu que U est à support compact, on obtient

$$U(r) = - \int_r^{+\infty} U'(t) dt$$

d'où

$$|U(r)| \leq \int_r^{+\infty} |U'(t)| dt.$$

Si $N \geq 3$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |U(r)| &\leq \int_r^{+\infty} |U'(t)| dt \\ &\leq \sqrt{\int_r^{+\infty} t^{1-N} dt} \sqrt{\int_r^{+\infty} |U'(t)|^2 t^{N-1} dt} \\ &\leq \sqrt{\frac{r^{2-N}}{N-2}} \sqrt{\int_0^{+\infty} |U'(t)|^2 t^{N-1} dt} \\ &\leq (\sigma_{\mathbb{S}(0,1)}(\mathbb{S}(0,1)) (N-2))^{-1/2} \|\nabla u\|_{L^2} r^{\frac{2-N}{2}} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité (II.4). Ainsi, on a prouvé l'inégalité (II.2)³ du lemme radial.

En raisonnant comme précédemment, on a

$$(U(r))^2 = -2 \int_r^{+\infty} U(t)U'(t) dt \leq 2 \int_r^{+\infty} |U(t)||U'(t)| dt.$$

Il existe une constante $\tilde{c}(N) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} r^{N-1}(U(r))^2 &\leq 2 \int_r^{+\infty} |U(t)||U'(t)| \cdot r^{N-1} dt \\ &\leq 2 \int_r^{+\infty} |U(t)||U'(t)| \cdot t^{N-1} dt \\ &\leq 2 \sqrt{\int_r^{+\infty} |U(t)|^2 t^{N-1} dt} \sqrt{\int_r^{+\infty} |U'(t)|^2 t^{N-1} dt} \\ &\leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} |U(t)|^2 t^{N-1} dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} |U'(t)|^2 t^{N-1} dt} \\ &= \tilde{c}(N) \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \end{aligned}$$

3. Notons qu'on a ici utilisé l'hypothèse $N \geq 3$ lors du calcul de $\int_r^{+\infty} t^{1-N} dt$. Si $N = 2$, on a $\int_r^{+\infty} t^{-1} dt = +\infty$ pour tout $r > 0$.

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les égalités (II.3) et (II.4). En posant $c(N) := \sqrt{\tilde{c}(N)}$, on obtient

$$|U(r)| \leq c(N) \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1-N}{2}},$$

ce qui prouve l'inégalité (II.1) du lemme radial. \square

Proposition II.5 (Prolongement de la compacité par densité). *Soient X un espace vectoriel normé, Y un espace de Banach et Z un sous-espace dense de X . Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur linéaire continu. Si $T_Z \in \mathcal{L}(Z, Y)$ est la restriction de T à Z , alors T_Z est compact si et seulement si T est compact.*

Démonstration. Si T est compact alors T_Z l'est aussi. En effet, si $(z_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée de Z , alors $(z_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans X , donc $(Tz_n)_{n \geq 1} = (T_Z z_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergente dans Y .

Réciproquement, supposons que T_Z est compact. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de X . Puisque Z est dense dans X , il existe une suite $(z_n)_{n \geq 1} \subseteq Z$ telle que pour tout $n \geq 1$, on a $\|x_n - z_n\|_X \leq \frac{1}{n}$. Dès lors, la suite $(x_n - z_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, donc $Tx_n - Tz_n$ converge également vers 0. Puisque T_Z est compact, la suite $(Tz_n)_{n \geq 1} = (T_Z z_n)_{n \geq 1}$ possède une sous-suite convergente $(Tz_{n_k})_{k \geq 1}$. En écrivant $Tx_{n_k} = Tz_{n_k} + (Tx_{n_k} - Tz_{n_k})$, on en conclut que $(Tx_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers la même limite que $(Tz_{n_k})_{k \geq 1}$. \square

Dans la suite des chapitres, nous utilisons l'exposant critique du plongement de Sobolev pour l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$ défini comme suit :

$$2^* = \begin{cases} \infty & \text{si } N = 2, \\ \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Théorème II.6 (Injection compacte de H_r^1 dans L^q). *Si $q \in]2, 2^*[$ et $N \geq 2$ alors l'injection de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est compacte.*

Démonstration. Soit $q \in]2, 2^*[$.

▷ *Étape 1* **Contrôle des normes L^q loin de l'origine sur $\mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$**

Pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$, tout $R > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$, on a

$$|u(x)| \leq c(N) \|u\|_{H^1} R^{\frac{1-N}{2}}$$

en majorant $\|u\|_{L^2}$ et $\|\nabla u\|_{L^2}$ par $\|u\|_{H^1}$ et en minorant $|x|$ par R dans l'inégalité (II.1) du lemme radial (lemme II.4).

Élevons les deux membres de l'inégalité ci-dessus à la puissance $q-2$ et multiplions-les par $|u(x)|^2|x|^{N-1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$, on obtient alors

$$|u(x)|^q|x|^{N-1} \leq c(N)^{q-2} \|u\|_{H^1}^{q-2} R^{\frac{(1-N)(q-2)}{2}} |u(x)|^2|x|^{N-1}.$$

En intégrant l'inégalité précédente sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$, on en déduit que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R))}^q \leq c(N)^{q-2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{q-2} R^{\frac{(1-N)(q-2)}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R))}^2.$$

En majorant $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R))}$ par $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ et en prenant ensuite la racine q^e des deux membres de l'inégalité précédente, il en découle

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R))} \leq c(N)^{\frac{q-2}{q}} \|u\|_{H^1} R^{\frac{(1-N)(q-2)}{2q}}. \quad (\text{II.5})$$

▷ **Étape 2 Compacité de l'injection sur $\mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$**

Considérons une suite $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ bornée en norme $H^1(\mathbb{R}^N)$. On veut montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite qui converge en norme L^q .

Soit $k \geq 1$. D'après le théorème de Rellich–Kondrachov (théorème A.45) de compacité de l'injection de $H^1(B(0, k))$ dans $L^q(B(0, k))$ (car $q < 2^*$), la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ possède une sous-suite convergente dans $L^q(B(0, k))$. Ceci étant vrai pour tout k , nous pouvons utiliser un argument diagonal : on pose $u_{0,n} := u_n$ puis pour tout $k \geq 1$, on extrait une sous-suite $(u_{k,n})_{n \geq 1}$ de $(u_{k-1,n})_{n \geq 1}$ de telle sorte que $(u_{k,n})_{n \geq 1}$ converge fortement dans $L^q(B(0, k))$. Alors, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n := u_{n,n}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n \geq 1}$ qui converge fortement dans tous les $L^q(B(0, k))$ où $k \geq 1$.

En effet, si $k, m, n \geq 1$, on a

$$\|v_m - v_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|v_m - v_n\|_{L^q(B(0, k))} + \|v_m - v_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B(0, k))}.$$

Par l'inégalité (II.5), le second terme peut être rendu petit uniformément en m, n pour k assez grand (car la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est bornée en norme H^1). Fixons alors k et rendons le premier terme petit en prenant m et n suffisamment grands puisque la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge fortement dans $L^q(B(0, k))$. Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^q(\mathbb{R}^N)$. Puisque $L^q(\mathbb{R}^N)$ est complet, $(v_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite convergente de $(u_n)_{n \geq 1}$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.

▷ **Étape 3 Prolongement de la compacité par densité**

D'après la conclusion de l'étape précédente, l'espace $(\mathcal{C}_{c,r}^\infty(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^1})$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\mathbb{R}^N)$. D'après le lemme de densité (lemme II.3) et par prolongement de la compacité (voir la proposition II.5), nous concluons que $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\mathbb{R}^N)$. \square

Remarque II.7. L'espace $H_r^1(\mathbb{R})$ est donné par

$$H_r^1(\mathbb{R}) := \{u \in H^1(\mathbb{R}) \mid u(x) = u(-x) \text{ presque partout}\}.$$

En effet, en dimension 1, le groupe orthogonal ne contient que deux éléments qui correspondent aux transformations $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Cet espace ne s'injecte de façon compacte dans aucun espace $L^p(\mathbb{R})$. En effet, considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle et à support dans $[0, 1]$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\varphi_n(x) := \varphi(x-n) + \varphi(-x-n)$ est une suite de fonctions paires qui ont la même norme (non nulle) dans $H^1(\mathbb{R})$ et la même norme dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$. On montre comme pour les phénomènes de perte de compacité par translations (voir la section II.1.1) que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 au sens des distributions ce qui implique que $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ n'admet aucune sous-suite fortement convergente dans $L^p(\mathbb{R})$.

Ainsi, il est nécessaire de travailler en dimension $N \geq 2$ pour obtenir de la compacité dans le plongement de Sobolev pour les fonctions radiales, d'où l'hypothèse $N \geq 2$ à partir de la section II.2.

II.1.3 Pertes de compacité par dilatations

Proposition II.8. *Si $N \geq 1$, alors le plongement de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compact.*

Démonstration. Considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{c,x}^\infty(\mathbb{R}^N)$ non nulle. En particulier, φ appartient à $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. Quitte à multiplier φ par une constante, nous pouvons supposer que $\|\varphi\|_{L^2} = 1$. Définissons une suite de fonctions par

$$\varphi_n(x) := \varphi\left(\frac{x}{n}\right) n^{-N/2}$$

pour tout $n \geq 1$. On a $\|\varphi_n\|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla \varphi_n\|_{L^2} = \|\nabla \varphi\|_{L^2}/n$ (voir la proposition A.35 concernant les dilatations dans les espaces de Sobolev).

Dès lors, la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. Montrons qu'elle n'admet aucune sous-suite fortement convergente dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ce qui prouvera que le plongement de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compact.

Supposons qu'il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ et une fonction $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telles que $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers $\tilde{\varphi}$ en norme L^2 . Remarquons que $\|\tilde{\varphi}\|_{L^2} = 1$ car $\|\varphi_n\|_{L^2} = 1$ pour tout $n \geq 1$.

De plus, la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en norme L^∞ , de même pour sa sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$. Puisque la convergence au sens de L^∞ implique la convergence au sens des distributions (voir la proposition A.18), on en déduit

que la suite $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers 0 au sens des distributions. Or, $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers $\tilde{\varphi}$ au sens des distributions car la convergence au sens de L^2 implique la convergence au sens des distributions (voir la proposition A.18). Par unicité de la limite au sens des distributions, on en déduit que $\tilde{\varphi}$ est nulle presque partout ce qui contredit l'égalité $\|\tilde{\varphi}\|_{L^2} = 1$. \square

Remarque II.9. Nous observons donc un phénomène de « perte de compacité à l'infini » pour le plongement de $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ dû au fait que \mathbb{R}^N est non-borné. En effet, d'après le théorème de Rellich-Kondrachov (théorème A.45), nous savons que si Ω est un ouvert borné de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N , alors l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1, 2^*[$.

Proposition II.10. *Soit $N \geq 3$. Le plongement de $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compact. Plus généralement, si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant 0, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans Ω bornée en norme H^1 et n'admettant pas de sous-suite convergente en norme L^{2^*} .*

Démonstration. Soient $r > 0$ tel que $B(0, r)$ est inclus dans Ω et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^N)$ une fonction non nulle à support dans $B(0, r)$ (voir la proposition A.4 pour l'existence de telles fonctions). Quitte à multiplier φ par une constante, nous pouvons supposer que $\|\varphi\|_{L^{2^*}} = 1$. On définit

$$\varphi_n(x) := \varphi(nx) n^{\frac{N}{2}-1}$$

pour tout $n \geq 1$. Notons que le support de φ_n est inclus dans $B(0, \frac{r}{n})$, en particulier dans $B(0, r)$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\|\nabla \varphi_n\|_{L^2} = \|\nabla \varphi\|_{L^2}$ et $\|\varphi_n\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}/n$. La suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est donc bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, elle n'admet aucune sous-suite fortement convergente dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ et une fonction $\tilde{\varphi} \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ telles que $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers $\tilde{\varphi}$ en norme L^{2^*} . Pour tout $n \geq 1$, on a $\|\varphi_n\|_{L^{2^*}} = 1$ (voir la proposition A.35 concernant les dilatations dans les espaces de Sobolev). Puisque $\|\varphi_n\|_{L^2} = \frac{1}{n}$, $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 dans L^2 . Vu que la convergence au sens de L^2 implique la convergence au sens des distributions et par unicité de la limite au sens des distributions, on en déduit que $\tilde{\varphi} = 0$ presque partout.

Nous avons donc montré que $\|\tilde{\varphi}\|_{L^{2^*}} = 1$ et que $\tilde{\varphi} = 0$, d'où la contradiction souhaitée. \square

Remarque II.11. Nous observons ici un phénomène de « perte de compacité en un point » pour le plongement de $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Cette fois, le

problème ne vient plus du fait que le domaine est non borné. Ce phénomène explique pourquoi l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ n'est jamais compacte, d'où l'inégalité stricte sur l'exposant dans le théorème de Rellich–Kondrachov (théorème A.45).

II.2 Calcul des variations

II.2.1 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du mémoire, nous supposons que la dimension N est supérieure ou égale à 2.

D'après le théorème II.6 l'espace $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in]2, 2^*[$.

On s'intéresse maintenant à l'inégalité suivante.

Théorème II.12 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg). *Soit $q \in]2, 2^*[$. Il existe $C_q > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{L^2}^{1-s} \|\nabla u\|_{L^2}^s,$$

$$\text{où } s := \frac{(q-2)N}{2q}.$$

En suivant l'approche de Michael I. Weinstein dans [43], nous allons déterminer la constante optimale C_q dans l'inégalité précédente pour tout $q \in]2, 2^*[$, ce qui prouvera en particulier le théorème II.12.

Remarque II.13. Notons que s parcourt l'intervalle $]0, 1[$ lorsque q parcourt l'intervalle $]2, 2^*[$. Considérons les valeurs limites de q .

- Dans le cas « $q = 2$ », l'exposant s est nul et l'inégalité « dégénère » car on peut prendre $C_2 = 1$ et dans ce cas il y a égalité pour toutes les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$.
- Le cas « $q = 2^*$ » (pour $N \geq 3$) correspond à l'inégalité $\|u\|_{L^{2^*}} \leq C_{2^*} \|\nabla u\|_{L^2}$. Nous parlerons de ce cas dans la section II.5.

Remarque II.14. Expliquons d'où proviennent les exposants s et $1 - s$ dans le théorème II.12. Supposons qu'une inégalité de la forme

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^2}^r \|\nabla u\|_{L^2}^s, \quad (\text{II.6})$$

soit vérifiée pour toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Fixons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ non nulle. Les normes $\|\varphi\|_{L^q}$, $\|\varphi\|_{L^2}$ et $\|\nabla\varphi\|_{L^2}$ sont strictement positives.

L'inégalité (II.6) doit en particulier être satisfaite pour toutes les fonctions $(\mu\varphi)_{\mu>0}$. On en déduit que l'inégalité

$$\mu\|\varphi\|_{L^q} \leq C\mu^r \|\varphi\|_{L^2}^r \mu^s \|\nabla\varphi\|_{L^2}^s$$

doit être satisfaite pour tout $\mu > 0$. En considérant le cas $\mu \rightarrow 0$ et le cas $\mu \rightarrow +\infty$, on obtient $r = 1 - s$. De même, l'inégalité (II.6) doit être satisfaite pour toutes les fonctions $(x \mapsto \varphi(\lambda x))_{\lambda>0}$. On en déduit (voir la proposition A.35 concernant les dilations dans les espaces de Sobolev) que l'inégalité

$$\lambda^{-\frac{N}{q}} \|\varphi\|_{L^q} \leq C\lambda^{-\frac{N(1-s)}{2}} \|\varphi\|_{L^2}^{1-s} \lambda^{s(1-\frac{N}{2})} \|\nabla\varphi\|_{L^2}^s$$

doit être satisfaite pour tout $\lambda > 0$. En faisant varier λ de 0 à $+\infty$, on conclut que

$$-\frac{N}{q} = -\frac{N(1-s)}{2} + s\left(1 - \frac{N}{2}\right),$$

d'où $s = \frac{N}{2} - \frac{N}{q} = \frac{(q-2)N}{2q}$.

Notons que les translations n'apportent pas d'informations dans cette discussion puisque les deux membres de l'inégalité (II.6) sont invariants par translation.

Fixons un paramètre $q \in]2, 2^[$ jusqu'à la fin du chapitre.*

II.2.2 Formulation variationnelle

Prouver l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (théorème II.12) revient à montrer que l'infimum de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(u) := \frac{\|u\|_{L^2}^{q(1-s)} \|\nabla u\|_{L^2}^{qs}}{\|u\|_{L^q}^q} \quad (\text{II.7})$$

sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ est strictement positif. D'après le théorème de plongement de Sobolev (théorème A.41) et vu que $2 < q < 2^*$, cette fonctionnelle est bien définie sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Le résultat suivant affirme que les points critiques de cette fonctionnelle correspondent à des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ d'équations aux dérivées partielles.

Proposition II.15 (Différentiabilité de \mathcal{J} , équation d'Euler-Lagrange associée). *La fonctionnelle \mathcal{J} est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ et sa différentielle au point $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ est donnée par*

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(u) \cdot h = \mathcal{J}(u) & \left(\frac{q(1-s)}{\|u\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)h(x) \, dx \right. \\ & + \frac{qs}{\|\nabla u\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla h(x) \, dx \\ & \left. - \frac{q}{\|u\|_{L^q}^q} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{q-2} u(x)h(x) \, dx \right) \quad (\text{II.8}) \end{aligned}$$

pour tout $h \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ est un point critique de \mathcal{J} si et seulement si u est une solution distributionnelle de l'équation

$$-\Delta u + \frac{(1-s)\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^2}^2} u = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^q}^q} |u|^{q-2} u, \quad (\text{EDP}_{\mathcal{J}})$$

c'est-à-dire (par définition d'une solution distributionnelle) si

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx + \frac{(1-s)\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x) \, dx \\ = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^q}^q} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{q-2} u(x)\varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Remarque II.16. On dit que $(\text{EDP}_{\mathcal{J}})$ est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle \mathcal{J} . L'identification entre les *points critiques* de la fonctionnelle \mathcal{J} et les *solutions* $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ de l'équation $(\text{EDP}_{\mathcal{J}})$ est à la base de la résolution de cette équation par les méthodes de *calcul de variations*.

Démonstration. Afin d'alléger les notations, posons

$$A(u) := \|u\|_{L^2}^2, \quad B(u) := \|\nabla u\|_{L^2}^2, \quad C(u) := \|u\|_{L^q}^q.$$

▷ *Étape 1 Différentiabilité de A et B*

Les applications

$$A : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto A(u)$$

et

$$B : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto B(u)$$

définissent des formes quadratiques sur $H^1(\mathbb{R}^N)$. En effet,

$$H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x) \, dx$$

et

$$H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx$$

sont des applications bilinéaires symétriques continues sur $H^1(\mathbb{R}^N)$. Donc A et B sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ et leurs différentielles sont données par

$$dA(u) \cdot h = 2 \int_{\mathbb{R}^N} u(x)h(x) \, dx \quad (\text{II.9})$$

et

$$dB(u) \cdot h = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla h(x) \, dx \quad (\text{II.10})$$

pour tout $u, h \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

▷ *Étape 2* **Différentiabilité de C**

D'après la différentiabilité des normes dans les espaces L^p (voir [45, Proposition 1.12]), l'application $C : L^q(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto C(u)$ est de classe \mathcal{C}^1 et sa différentielle est donnée par

$$dC(u) \cdot h = q \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{q-2} u(x) h(x) \, dx \quad (\text{II.11})$$

pour tout $u, h \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

En composant C avec l'injection canonique $H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^N) : u \mapsto u$, le théorème de dérivation des fonctions composées implique que l'application

$$C|_{H^1(\mathbb{R}^N)} : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto C(u)$$

est différentiable sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ et que sa différentielle est donnée par l'expression (II.11) pour tout $u, h \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

▷ *Étape 3* **Différentiabilité de \mathcal{J}**

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, on a

$$\mathcal{J}(u) = \frac{A(u)^{\frac{q(1-s)}{2}} B(u)^{\frac{qs}{2}}}{C(u)}.$$

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, \mathcal{J} est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ et on a

$$d\mathcal{J}(u) \cdot h = \mathcal{J}(u) \left(\frac{q(1-s)}{2} \frac{dA(u) \cdot h}{A(u)} + \frac{qs}{2} \frac{dB(u) \cdot h}{B(u)} - \frac{dC(u) \cdot h}{C(u)} \right)$$

pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ et $h \in H^1(\mathbb{R}^N)$. D'après les expressions (II.9), (II.10) et (II.11), la différentielle de \mathcal{J} au point u est donnée par (II.8).

▷ **Étape 4 Équation d'Euler-Lagrange**

Vu l'expression de $d\mathcal{J}$, une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ est un point critique de \mathcal{J} si et seulement si pour tout $h \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1-s}{\|u\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)h(x) \, dx + \frac{s}{\|\nabla u\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla h(x) \, dx \\ - \frac{1}{\|u\|_{L^q}^q} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{q-2} u(x)h(x) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, cela équivaut à demander que cette égalité soit vérifiée pour tout $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, ou encore que u soit solution de (EDP $_{\mathcal{J}}$) au sens des distributions. \square

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème II.17 (Constante optimale dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, M.I. Weinstein 1982). *L'infimum*

$$\gamma := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \mathcal{J}(u)$$

est atteint pour une fonction Q qui :

- appartient à $H^1_r(\mathbb{R}^N)$;
- est positive ;
- est une solution distributionnelle non-nulle de l'équation

$$-\Delta Q + Q = |Q|^{q-2} Q. \tag{EDP_Q}$$

La fonction Q réalise l'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir le théorème II.12) avec la constante $C_q = \gamma^{-1/q}$.

Remarque II.18. Dans le chapitre III, nous présenterons des résultats d'unicité et de régularité pour les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ positives de l'équation (EDP $_Q$). En particulier, nous verrons que Q est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, Q est l'unique solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ positive (sous-entendu non-nulle) de (EDP $_Q$).

Démonstration. Considérons tout d'abord l'effet des dilatations et des homothéties sur la fonctionnelle. Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, écrivons $u^{\lambda, \mu}(x) := \mu u(\lambda x)$ pour alléger les notations. Un calcul direct (voir la proposition A.35) montre que

$$\begin{aligned} \|u^{\lambda, \mu}\|_{L^2} &= \mu \lambda^{-N/2} \|u\|_{L^2}, \\ \|\nabla u^{\lambda, \mu}\|_{L^2} &= \mu \lambda^{1-N/2} \|\nabla u\|_{L^2}, \\ \|u^{\lambda, \mu}\|_{L^q} &= \mu \lambda^{-N/q} \|u\|_{L^q}, \\ \mathcal{J}(u^{\lambda, \mu}) &= \mathcal{J}(u). \end{aligned} \tag{II.12}$$

Il existe une suite minimisante $(u_k)_{k \geq 1} \subseteq H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ telle que

$$0 \leq \gamma := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \mathcal{J}(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_k) < +\infty.$$

Par passage à la valeur absolue dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ (voir la proposition A.31), on peut supposer que les fonctions u_k sont à valeurs positives. En effet, u_k et $|u_k|$ ont les mêmes normes L^q et leurs gradients ont la même norme L^2 .

Par symétrisation et d'après l'inégalité de Polya-Szegő (théorème I.70), nous pouvons supposer de plus que les fonctions u_k sont radiales. En effet, pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{J}(u_k^*) \leq \mathcal{J}(u_k)$ car u_k^* a les mêmes normes L^p que u_k et son gradient a une norme L^2 inférieure ou égale à celle de u_k . De plus, u_k^* est une fonction radiale.

D'après l'égalité (II.12), la fonctionnelle \mathcal{J} est invariante par homothéties et dilatations. On pose $(\psi_k)_{k \geq 1} := (u_k^{\lambda_k, \mu_k})_{k \geq 1}$. En choisissant $\lambda_k := \|u_k\|_{L^2} \|\nabla u_k\|_{L^2}^{-1}$ et $\mu_k := \|u_k\|_{L^2}^{\frac{N-2}{2}} \|\nabla u_k\|_{L^2}^{-\frac{N}{2}}$, nous obtenons une suite $(\psi_k)_{k \geq 1} \subseteq H^1_r(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\psi_k \geq 0, \quad \|\psi_k\|_{L^2} = 1, \quad \|\nabla \psi_k\|_{L^2} = 1, \quad \mathcal{J}(\psi_k) \geq \gamma, \quad \mathcal{J}(\psi_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \gamma. \tag{II.13}$$

La suite $(\psi_k)_{k \geq 1}$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, grâce au théorème de compacité faible des boules dans un espace de Hilbert (voir [44, Theorem 5.3.9]) et quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\psi_k)_{k \geq 1}$ converge faiblement vers un certain Ψ appartenant à $H^1(\mathbb{R}^N)$. Puisque $2 < q < 2^*$, l'injection de $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est compacte d'après le théorème II.6. Dès lors, quitte à passer de nouveau à une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\psi_k)_{k \geq 1}$ converge fortement vers Ψ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $k \geq 1$, on a $\mathcal{J}(\psi_k) = \frac{1}{\|\psi_k\|_{L^q}^q}$ d'après (II.13). De plus, la suite $(\mathcal{J}(\psi_k))_{k \geq 1}$ est bornée supérieurement car elle converge vers γ . On en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que $\|\psi_k\|_{L^q}^q \geq c$ pour tout $k \geq 1$. Vu que la suite $(\psi_k)_{k \geq 1}$ converge vers Ψ dans L^q , alors $\|\Psi\|_{L^q}^q \geq c$. En particulier, Ψ est non-nulle. La fonction Ψ est radiale

car les fonctions ψ_k le sont et que la suite $(\psi_k)_{k \geq 1}$ converge vers Ψ dans L^q (voir la remarque II.2).

Les fonctions $u \mapsto \|u\|_{L^2}$ et $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ sont convexes et continues sur $H^1(\mathbb{R}^N)$. Elles sont donc faiblement semi-continues inférieurement (voir [9, Corollary 3.9]), d'où $\|\Psi\|_{L^2} \leq 1$ et $\|\nabla \Psi\|_{L^2} \leq 1$. On en déduit que

$$\gamma \leq \mathcal{J}(\Psi) = \frac{\|\nabla \Psi\|_{L^2}^{qs} \|\Psi\|_{L^2}^{q(1-s)}}{\|\Psi\|_{L^q}^q} \leq \frac{1}{\|\Psi\|_{L^q}^q} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\psi_k) = \gamma \quad (\text{II.14})$$

vu que la suite $(\psi_k)_{k \geq 1}$ converge vers Ψ dans L^q et que $\mathcal{J}(\psi_k) = \frac{1}{\|\psi_k\|_{L^q}^q}$. Par conséquent, les inégalités qui précèdent sont des égalités. Dès lors, on a

$$\gamma = \mathcal{J}(\Psi) = \frac{1}{\|\Psi\|_{L^q}^q}, \quad (\text{II.15})$$

$$\|\nabla \Psi\|_{L^2}^{qs} \|\Psi\|_{L^2}^{q(1-s)} = 1. \quad (\text{II.16})$$

En particulier, γ est strictement positif.

Puisque $\|\Psi\|_{L^2} \leq 1$, que $\|\nabla \Psi\|_{L^2} \leq 1$, que les exposants qs et $q(1-s)$ sont positifs et d'après l'égalité (II.16), on obtient $\|\Psi\|_{L^2} = \|\nabla \Psi\|_{L^2} = 1$.

Vu que $\gamma = \mathcal{J}(\Psi)$, Ψ est un minimum global de \mathcal{J} sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Ceci prouve les deux premiers points du théorème puisque Ψ appartient à $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, Ψ est un point critique de \mathcal{J} . On en déduit que Ψ est une solution de l'équation (EDP $_{\mathcal{J}}$) (voir la proposition II.15), c'est-à-dire que

$$-\Delta \Psi + \frac{(1-s)\|\nabla \Psi\|_{L^2}^2}{s\|\Psi\|_{L^2}^2} \Psi = \frac{\|\nabla \Psi\|_{L^2}^2}{s\|\Psi\|_{L^q}^q} |\Psi|^{q-2} \Psi$$

au sens des distributions. Vu que $\|\Psi\|_{L^2} = \|\nabla \Psi\|_{L^2} = 1$, que $\frac{1}{\|\Psi\|_{L^q}^q} = \gamma$ d'après les égalités (II.15) et que Ψ est positive, on obtient

$$-\Delta \Psi + \frac{1-s}{s} \Psi - \frac{\gamma}{s} \Psi^{q-1} = 0 \quad (\text{II.17})$$

au sens des distributions.

Nous aimerions simplifier les coefficients qui apparaissent dans l'équation (II.17), notamment le coefficient γ qui dépend de Q et non directement de q et de N . Si λ et μ sont strictement positifs, alors $\Psi^{\lambda, \mu}$ est solution de

$$-\mu \lambda^2 \Delta \Psi^{\lambda, \mu} + \frac{\mu(1-s)}{s} \Psi^{\lambda, \mu} - \frac{\gamma \mu^{q-1}}{s} (\Psi^{\lambda, \mu})^{q-1} = 0.$$

Nous pourrions simplifier les coefficients dans l'équation (II.17) si

$$s\mu \lambda^2 = \mu(1-s) = \gamma \mu^{q-1}. \quad (\text{II.18})$$

Si λ et μ sont strictement positifs, les équations (II.18) admettent un unique couple (λ, μ) de solutions donné par $\lambda := \sqrt{\frac{1-s}{s}}$ et $\mu := \left(\frac{1-s}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q-2}}$. Si $Q := \Psi^{\lambda, \mu}$, alors Q est une solution de (EDP $_Q$). Puisque la fonctionnelle \mathcal{J} est invariante par dilatations et homothéties, Q est un minimum global de \mathcal{J} . Dès lors, la constante optimale dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg est donnée par $C_q = \gamma^{-\frac{1}{q}}$ et la fonction Q réalise l'égalité dans l'inégalité. \square

D'après le théorème II.17, *il existe* une solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ non nulle de l'équation (EDP $_Q$) qui est un minimum global de \mathcal{J} . Réciproquement, nous allons montrer dans les sections suivantes que *toutes* les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ non nulles de l'équation (EDP $_Q$) sont des points critiques de \mathcal{J} .

Remarque II.19. Toutes ces solutions ne sont pas des minima globaux de \mathcal{J} sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. À la fin du chapitre suivant, nous pourrons déterminer tous les minima globaux de \mathcal{J} et nous citerons des résultats d'existence de solutions qui impliquent qu'il existe une infinité de solutions qui ne sont pas des minima globaux de \mathcal{J} .

D'après la proposition II.15, une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ est un point critique de \mathcal{J} si et seulement si u est une solution de l'équation (EDP $_J$). Nous devons donc prouver que toutes les solutions $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ non nulles de l'équation (EDP $_Q$) sont telles que

$$\frac{(1-s)\|\nabla Q\|_{L^2}^2}{s\|Q\|_{L^2}^2} = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}{s\|Q\|_{L^q}^q} = 1.$$

Afin de prouver ces égalités reliant $\|Q\|_{L^2}$, $\|Q\|_{L^q}$ et $\|\nabla Q\|_{L^2}$, il est utile de prouver d'abord un résultat de *régularité* sur les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ non-nulles de l'équation (EDP $_Q$). Ce résultat est présenté dans la section suivante.

Enfin, remarquons que l'équation (EDP $_Q$) admet une formulation variationnelle. En effet, en raisonnant de la même façon que pour la proposition II.15, on montre que la fonctionnelle \mathcal{A} définie par

$$\mathcal{A}(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{q}\|u\|_{L^q}^q \quad (\text{II.19})$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ et que les points critiques de \mathcal{A} correspondent aux solutions de (EDP $_Q$).

Remarque II.20. La fonctionnelle \mathcal{A} n'est pas bornée inférieurement. On ne peut pas trouver de solutions à (EDP $_Q$) en minimisant globalement \mathcal{A} sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ comme on l'a fait pour \mathcal{J} . Il faut plutôt minimiser \mathcal{A} *sous contraintes*. Voir par exemple [5, Section 3. The Constrained Minimization Problem].

II.3 Régularité des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$

Dans cette section, nous allons étudier la régularité des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ de l'équation (EDP_Q) et montrer que de telles solutions convergent vers 0 à l'infini ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

Pour cela, nous allons utiliser la méthode dite du « bootstrap », basée sur le théorème de plongement de Sobolev pour les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (théorème A.41). Nous avons également besoin du résultat suivant, dû à A.P. Calderón (voir [1, Theorem 1.2.3]).

Théorème II.21 (Théorie $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ pour l'équation $-\Delta u + u = f$).
Soient $p \in]1, \infty[$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de l'équation $-\Delta u + u = f$ alors u appartient à $W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque II.22. Nous admettons le théorème précédent. Sa preuve utilise des techniques d'analyse harmonique. L'hypothèse « $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ » n'est pas essentielle, il suffit de savoir que u est une distribution tempérée sur \mathbb{R}^N .

Signalons que la référence [1, Theorem 1.2.3] concerne uniquement le cas $k = 0$. Le cas général s'en déduit car, si $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ est une solution de $-\Delta u + u = f$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$-\Delta(\partial^\alpha u) + \partial^\alpha u = \partial^\alpha f,$$

d'où $\partial^\alpha u$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$ en utilisant le théorème avec $k = 0$.

La méthode de bootstrap utilisera de façon répétée le lemme suivant.

Lemme II.23. Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de (EDP_Q) appartenant à $L^s(\mathbb{R}^N)$ où $s \in]q-1, \infty[$, alors Q appartient à $W^{2,s/(q-1)}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. La fonction Q est une solution de l'équation $-\Delta Q + Q = f$ où $f := |Q|^{q-2}Q$. On en déduit que Q appartient à $W^{2,s/(q-1)}(\mathbb{R}^N)$ d'après le théorème II.21 vu que f appartient à $L^{s/(q-1)}(\mathbb{R}^N) = W^{0,s/(q-1)}(\mathbb{R}^N)$. \square

La méthode de bootstrap est présentée notamment dans [22, Section 12.2]. En pratique, l'argument est souvent repris « au cas par cas » selon l'équation à traiter, voir par exemple [15, Proof of Theorem 1.1] ou [8, Proof of Proposition 2.2]. Le résultat suivant est, quant à lui, basé sur [13, Theorem 8.1.1].

Théorème II.24 (Régularité et limite à l'infini des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ de (EDP_Q)). Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de (EDP_Q) , alors

- Q appartient à $W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, +\infty[\cap]1, +\infty[$;
- Q appartient à $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta \in]0, 1[$;
- pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq 2$, on a

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial^\alpha Q(x) = 0.$$

En particulier, Q est une fonction bornée de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$.

Remarque II.25. Notons que $\frac{2}{q-1} < 2$ car $q > 2$.

Démonstration. Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution de (EDP_Q) .

▷ **Étape 1 Plongement de Sobolev pour $H^1(\mathbb{R}^N)$**

Le théorème de plongement de Sobolev (théorème A.41) implique que :

- si $N = 2$, Q appartient à $L^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in [2, \infty[$;
- si $N \geq 3$, Q appartient à $L^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in [2, 2^*]$ où $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Si $N = 2$, le lemme II.23 implique que Q appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, +\infty[\cap]1, +\infty[$. On peut alors passer directement à l'étape 3.

Si $N \geq 3$, nous allons montrer dans l'étape 2 que Q appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, +\infty[\cap]1, +\infty[$ en utilisant la méthode de bootstrap $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

▷ **Étape 2 Bootstrap $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour $N \geq 3$**

Montrons tout d'abord que

$$\exists p \geq \frac{N}{2}, \quad Q \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N). \quad (\text{II.20})$$

Puisque Q appartient à $L^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in [2, 2^*]$, le lemme II.23 implique que Q appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, p_1] \cap]1, +\infty[$ où $p_1 := \frac{2^*}{q-1}$. Remarquons que $p_1 > 1$ puisque $q < 2^*$. Deux cas sont possibles.

- Si $p_1 \geq \frac{N}{2}$, on a prouvé (II.20).
- Si $p_1 < \frac{N}{2}$, on passe à la suite du raisonnement.

Si $p_1 < \frac{N}{2}$, le théorème de plongement de Sobolev implique que l'espace $W^{2,p_1}(\mathbb{R}^N)$ se plonge dans $L^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in [p_1, \frac{Np_1}{N-2p_1}]$.

D'après le lemme II.23, Q appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{p_1}{q-1}, p_2] \cap]1, +\infty[$ où $p_2 := \frac{Np_1}{(q-1)(N-2p_1)}$. On verra ci-dessous que $p_2 > 1$.

À nouveau, deux cas sont possibles.

- Si $p_2 \geq \frac{N}{2}$, on a prouvé (II.20).
- Si $p_2 < \frac{N}{2}$, on recommence le processus.

De manière générale, à l'étape $n \geq 1$, on sait que Q appartient à $W^{2,p_n}(\mathbb{R}^N)$ avec $p_n < \frac{N}{2}$ (on ne définit pas p_{n+1}, p_{n+2}, \dots si $p_n \geq \frac{N}{2}$). Par le théorème de plongement de Sobolev, $|Q|^{q-2}Q$ appartient à $L^{\frac{Np_n}{(q-1)(N-2p_n)}}(\mathbb{R}^N)$. Le lemme II.23 implique alors que Q appartient à $W^{2,p_{n+1}}(\mathbb{R}^N)$ où

$$p_{n+1} := \frac{Np_n}{(q-1)(N-2p_n)}$$

car, comme on va le montrer juste après, $p_{n+1} > 1$.

Les p_n sont les itérées de p_1 pour la fonction $S : \mathbb{R} \setminus \{\frac{N}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \frac{Np}{(q-1)(N-2p)}$ (voir la figure II.1). Un calcul élémentaire montre que

$$S(p) > p \iff p \in \left] \frac{N}{2} \frac{q-2}{q-1}, \frac{N}{2} \right[. \quad (\text{II.21})$$

De plus, $\frac{N}{2} \frac{q-2}{q-1} < p_1$ car $q < 2^*$.

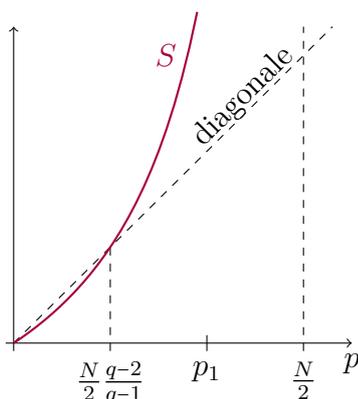


FIGURE II.1 – Graphe de la fonction S .

On veut montrer qu'en appliquant un nombre fini (peut-être nul) de fois la fonction S à p_1 , on finit par dépasser la valeur $\frac{N}{2}$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. En particulier, $p_1 < \frac{N}{2}$ donc p_1 appartient à $\left] \frac{N}{2} \frac{q-2}{q-1}, \frac{N}{2} \right[$.

Dès lors, la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et ses termes appartiennent à $\left] \frac{N}{2} \frac{q-2}{q-1}, \frac{N}{2} \right[$ (d'après l'équivalence II.21). Étant croissante et majorée par $\frac{N}{2}$, la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ converge vers un certain p tel que $1 < p \leq \frac{N}{2}$. Puisque pour tout $n \geq 1$ on a

$$(q-1)(N-2p_n)p_{n+1} = Np_n,$$

on en déduit en passant à la limite que

$$(q-1)(N-2p)p = Np,$$

d'où

$$p = \frac{N(q-2)}{2(q-1)}.$$

Puisque $q < 2^*$, on a $q-2 < \frac{4}{N-2}$ d'où

$$p < \frac{2N}{(q-1)(N-2)} = \frac{2^*}{q-1} = p_1,$$

ce qui contredit la stricte croissance de la suite.

On a donc prouvé qu'il existe un indice $n \geq 1$ tel que $p_n \geq \frac{N}{2}$. Puisque Q appartient à $W^{2,p_n}(\mathbb{R}^N)$, cela prouve l'objectif (II.20).

D'après le théorème de plongement de Sobolev et vu que $p_n \geq \frac{N}{2}$, Q appartient soit à $L^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in [p_n, \infty[$ soit à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme $Q \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a par interpolation dans les espaces L^p (voir [9, Theorem 4.6, Remark 2]) que Q appartient à $L^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in [2, \infty[$. Dès lors, le lemme II.23 implique que Q appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, \infty[\cap]1, \infty[$, ce qui achève l'argument de bootstrap.

▷ **Étape 3 Régularité $W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$**

D'après ce qui précède, Q appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, \infty[\cap]1, \infty[$, en particulier pour tout $p \in [2, \infty[$.

Si $\theta \in]0, 1[$ alors, en prenant $p = \frac{N}{1-\theta} > 2$, le théorème de plongement de Sobolev (théorème A.41) pour l'espace $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ implique que la fonction Q appartient à l'espace de Hölder $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, Q est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ et est bornée sur \mathbb{R}^N .

Si $p \in [\frac{2}{q-1}, \infty[\cap]1, \infty[$ alors la fonction $\partial_i(|Q|^{q-2}Q) = (q-1)|Q|^{q-2}\partial_i Q$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$ puisque Q est bornée et que $\partial_i Q$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$. Dès lors, $|Q|^{q-2}Q$ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, \infty[\cap]1, \infty[$.

D'après la théorie $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ pour l'équation $-\Delta u + u = f$ (théorème II.21), on en déduit que Q appartient à $W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, \infty[\cap]1, \infty[$.

▷ **Étape 4 Régularité $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$ et conclusion**

Puisque Q appartient à $W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [\frac{2}{q-1}, \infty[\cap]1, \infty[$, le théorème de plongement de Sobolev implique que Q appartient à $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta \in]0, 1[$ (on obtient la régularité $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{2,\theta}$ en prenant $p = \frac{N}{1-\theta} > 2$).

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq 2$, $\partial^\alpha Q$ est une fonction uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^N appartenant à $L^p(\mathbb{R}^N)$ (car $\partial^\alpha Q$

appartient à $W^{2-|\alpha|,p}(\mathbb{R}^N)$). On en déduit que $\partial^\alpha Q$ converge vers 0 à l'infini car les fonctions uniformément continues sur \mathbb{R}^N appartenant à $L^p(\mathbb{R}^N)$ convergent vers 0 à l'infini.

En effet, si une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue ne converge pas vers 0 en l'infini, alors il existe deux réels positifs $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^N$ tels que les boules $(B(x_n, \delta))_{n \geq 1}$ sont disjointes et tels que $|u|$ prend des valeurs supérieures à ε sur toutes ces boules. Ceci implique que u n'appartient pas à $L^p(\mathbb{R}^N)$. \square

Remarque II.26. En général, on ne peut pas poursuivre le raisonnement précédent pour de plus grandes valeurs de p car la fonction $t \mapsto |t|^{q-2}t$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ si $2 < q \leq 3$. Néanmoins, nous prouverons dans le chapitre III que les solutions positives de (EDP_Q) sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. En effet, la fonction $t \mapsto |t|^{q-2}t$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$. Il ne s'agira cependant que de résultats locaux portant sur la régularité et pas de résultats globaux comme ceux du résultat précédent (voir la remarque III.4).

II.4 Identités de l'énergie et de Pohožaev, ground states

Nous pouvons maintenant prouver les identités impliquant que toutes les solutions de (EDP_Q) sont des points critiques de \mathcal{J} .

Proposition II.27 (Identité de l'énergie). *Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de l'équation (EDP_Q), alors*

$$\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|Q\|_{L^2}^2 = \|Q\|_{L^q}^q.$$

Démonstration. Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de (EDP_Q), on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)h(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla Q(x) \cdot \nabla h(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |Q(x)|^{q-2}Q(x)h(x) \, dx = 0$$

pour tout $h \in H^1(\mathbb{R}^N)$. L'identité de l'énergie s'obtient en prenant $h = Q$. \square

Remarque II.28. Présentons une autre interprétation de l'identité de l'énergie, basée sur la formulation variationnelle donnée par la fonctionnelle

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{q}\|u\|_{L^q}^q.$$

Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution de (EDP_Q) . Pour tout $\mu > 0$, on a

$$\mathcal{A}(\mu Q) = \frac{\mu^2}{2} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \frac{\mu^2}{2} \|Q\|_{L^2}^2 - \frac{\mu^q}{q} \|Q\|_{L^q}^q.$$

Dès lors,

$$\frac{d}{d\mu}(\mathcal{A}(\mu Q))\Big|_{\mu=1} = \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \|Q\|_{L^2}^2 - \|Q\|_{L^q}^q.$$

De plus, on a

$$\frac{d}{d\mu}(\mathcal{A}(\mu Q))\Big|_{\mu=1} = d\mathcal{A}(Q) \cdot \left(\frac{d}{d\mu}(\mu Q) \right)\Big|_{\mu=1} = d\mathcal{A}(Q) \cdot Q = 0$$

puisque Q est un point critique de \mathcal{A} . On en déduit l'identité de l'énergie en égalant les deux expressions obtenues pour $\frac{d}{d\mu}(\mathcal{A}(\mu Q))\Big|_{\mu=1}$.

Proposition II.29 (Identité de Pohožaev). *Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de l'équation (EDP_Q) , alors*

$$(N-2)\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + N\|Q\|_{L^2}^2 = \frac{2N}{q}\|Q\|_{L^q}^q.$$

Remarque II.30. L'intuition consiste à faire un raisonnement semblable à celui de la remarque II.28 en considérant les dilatations $D_\lambda : Q(x) \mapsto Q(\lambda x)$ au lieu des homothétites $H_\mu : Q(x) \mapsto \mu Q(x)$.

Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution de (EDP_Q) . Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathcal{A}(D_\lambda Q) = \frac{\lambda^{2-N}}{2} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^{-N}}{2} \|Q\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda^{-N}}{q} \|Q\|_{L^q}^q,$$

d'où

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathcal{A}(D_\lambda Q))\Big|_{\lambda=1} = \frac{2-N}{2} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 - \frac{N}{2} \|Q\|_{L^2}^2 + \frac{N}{q} \|Q\|_{L^q}^q.$$

Puisque Q est un point critique de \mathcal{A} , on s'attend à ce que

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathcal{A}(D_\lambda Q))\Big|_{\lambda=1} = 0 \tag{II.22}$$

par analogie avec le raisonnement présenté dans la remarque II.28. Si l'égalité (II.22) est vérifiée, nous obtenons alors l'identité

$$(N-2)\|\nabla Q\|_{L^2}^2 + N\|Q\|_{L^2}^2 = \frac{2N}{q}\|Q\|_{L^q}^q.$$

Étudions la dérivabilité de l'application $\lambda \mapsto \mathcal{A}(D_\lambda Q)$ en $\lambda = 1$. Montrons qu'au sens des distributions, on a

$$\frac{D_\lambda Q - Q}{\lambda - 1} \xrightarrow[\lambda \rightarrow 1]{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)} x \cdot \nabla Q. \quad (\text{II.23})$$

En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda \neq 1$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(\lambda x) \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(y) \varphi(y/\lambda) \lambda^{-N} \, dy$$

en posant $y := \lambda x$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\lambda x) - Q(x)}{\lambda - 1} \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(y) \frac{\varphi(y/\lambda) \lambda^{-N} - \varphi(y)}{\lambda - 1} \, dy.$$

La dérivée de l'application $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto \varphi(y/\lambda) \lambda^{-N}$ est la fonction

$$]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto -y \cdot \nabla \varphi(y/\lambda) \lambda^{-N-2} - N \varphi(y/\lambda) \lambda^{-N-1}.$$

Lorsque $\lambda \in [1/2, 3/2]$, les fonctions $y \mapsto \frac{\varphi(y/\lambda) \lambda^{-N} - \varphi(y)}{\lambda - 1}$ sont à support dans un même intervalle compact I , convergent ponctuellement vers

$$-y \cdot \nabla \varphi(y) - N \varphi(y)$$

lorsque $\lambda \rightarrow 1$ et sont uniformément bornées par une expression de la forme $C(I)(\|\varphi\|_{L^\infty(I)} + \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(I)})$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(y) \frac{\varphi(y/\lambda) \lambda^{-N} - \varphi(y)}{\lambda - 1} \, dy \xrightarrow[\lambda \rightarrow 1]{} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(y) (y \cdot \nabla \varphi(y) + N \varphi(y)) \, dy.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} Q(y) y \cdot \nabla \varphi(y) \, dy &= \sum_{1 \leq i \leq N} \int_{\mathbb{R}^N} Q(y) y_i \partial_i \varphi(y) \, dy \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N} \int_{\mathbb{R}^N} Q(y) (\partial_i (y_i \varphi)(y) - \varphi(y)) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (y \cdot \nabla Q(y) - N Q(y)) \varphi(y) \, dy. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a montré que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(y) \frac{\varphi(y/\lambda) \lambda^{-N} - \varphi(y)}{\lambda - 1} \, dy \xrightarrow[\lambda \rightarrow 1]{} \int_{\mathbb{R}^N} y \cdot \nabla Q(y) \varphi(y) \, dy$$

ce qui prouve le résultat (II.23).

Le problème est qu'on ne sait pas si $x \cdot \nabla Q$ appartient ou non à $H^1(\mathbb{R}^N)$. Si ce n'est pas le cas, la fonction $\lambda \mapsto D_\lambda Q$ n'est pas dérivable en $\lambda = 1$.

Une façon de procéder consiste à prouver que ∇Q converge vers 0 suffisamment rapidement à l'infini. On peut montrer que Q et ses dérivées premières décroissent exponentiellement à l'infini (voir [13, Theorem 8.1.1]). Dans ce cas, la décroissance exponentielle de ∇Q à l'infini implique que $x \cdot \nabla Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ce qui permet de prouver l'égalité (II.22).

Dans le chapitre suivant, nous montrerons un tel résultat de décroissance exponentielle sur Q et ses dérivées mais uniquement pour les fonctions radiales (voir le théorème III.13).

La preuve de l'identité de Pohožaev qui suit se base sur une approche par intégration par parties utilisant un argument de troncature. Cette preuve ne nécessite pas d'estimée de décroissance sur ∇Q . Nous suivons la présentation de [45, Theorem B.3].

Avant de passer à la démonstration, nous rappelons le résultat d'intégration suivant (voir par exemple [44, Theorem 9.2.4]).

Théorème II.31 (Théorème de la divergence pour les boules). *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$ et $v \in \mathcal{C}^1(B[x_0, R]; \mathbb{R}^N)$, alors on a*

$$\int_{B]x_0, R[} \operatorname{div} v(x) \, dx = \frac{1}{R} \int_{\mathbb{S}(x_0, R)} v(\omega) \cdot \omega \, d\sigma_{\mathbb{S}(x_0, R)}(\omega),$$

où $\operatorname{div} v := \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_i v_i$ est la divergence de v et $\sigma_{\mathbb{S}(x_0, R)}$ est la mesure usuelle sur la sphère $\mathbb{S}(x_0, R)$.

Démonstration de la proposition II.29. L'intuition consiste à intégrer $(-\Delta Q + Q - |Q|^{q-2}Q)(x \cdot \nabla Q) = 0$ sur \mathbb{R}^N . On travaillera d'abord sur des domaines bornés et avec des fonctions de troncature.

▷ **Étape 1 Introduction d'une suite de fonctions de troncature**

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction décroissante valant 1 sur $] -\infty, 1]$ et nulle sur $[4, +\infty[$ (une telle fonction existe d'après la proposition A.3). Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\psi_n(x) := \psi(|x|^2/n^2).$$

D'après les hypothèses sur ψ , le support de ψ_n est inclus dans $B[0, 2n]$ et celui de $\nabla \psi_n$ dans $B[0, 2n] \setminus B(0, n)$. Pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\partial_i \psi_n(x) := 2x_i \partial_i \psi(|x|^2/n^2)/n^2$$

d'où

$$|\partial_i \psi_n(x)| \leq 2|x| |\nabla \psi|/n^2.$$

Si $|x| \leq 2n$, on a

$$|x| |\nabla \psi_n(x)| \leq 2N|x|^2 |\nabla \psi| / n^2 \leq 8N |\nabla \psi|.$$

Cette inégalité est également vraie si $|x| > 2n$ puisque le support de ψ_n est inclus dans $B[0, 2n]$.

En résumé, il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$0 \leq \psi_n(x) \leq 1, \quad |\nabla \psi_n(x)| |x| \leq c. \quad (\text{II.24})$$

▷ *Étape 2 Utilisation du théorème de la divergence*

Pour alléger les notations, on pose

$$f(t) := |t|^{q-2}t - t, \quad F(t) := |t|^q/q - t^2/2. \quad (\text{II.25})$$

Remarquons que $F' = f$ et que $F(Q)$ est intégrable sur \mathbb{R}^N puisque $q < 2^*$. Puisque Q est solution de l'équation (EDP $_Q$), on a

$$\psi_n(\Delta Q + f(Q))(x \cdot \nabla Q) = 0. \quad (\text{II.26})$$

Faisons apparaître des termes s'écrivant comme une divergence afin d'appliquer ensuite le théorème de la divergence. Pour tout $n \geq 1$, un calcul explicite montre que

$$\begin{aligned} \psi_n f(Q)(x \cdot \nabla Q) &= \operatorname{div}(\psi_n F(Q)x) - F(Q)(\nabla \psi_n \cdot x) - \psi_n N F(Q), \\ \psi_n \Delta Q(x \cdot \nabla Q) &= \operatorname{div}(\psi_n(x \cdot \nabla Q)\nabla Q) \\ &\quad - ((\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) + \psi_n |\nabla Q|^2 + \psi_n x \cdot \nabla(|\nabla Q|^2/2)) \\ &= \operatorname{div}(\psi_n[(x \cdot \nabla Q)\nabla Q - (|\nabla Q|^2/2)x]) \\ &\quad + (|\nabla Q|^2/2)(\nabla \psi_n \cdot x) + \psi_n(N-2)(|\nabla Q|^2/2) \\ &\quad - (\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q). \end{aligned}$$

Si $R > 0$, l'égalité (II.26) et les calculs précédents impliquent que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(0,R)} \psi_n(\Delta Q + f(Q))(x \cdot \nabla Q) \, dx \\ &= \int_{B(0,R)} \operatorname{div}(\psi_n[F(Q)x + (x \cdot \nabla Q)\nabla Q - (|\nabla Q|^2/2)x]) \, dx \\ &\quad + \int_{B(0,R)} ((|\nabla Q|^2/2)(\nabla \psi_n \cdot x) + \psi_n(N-2)(|\nabla Q|^2/2) \\ &\quad \quad - (\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) - \psi_n N F(Q) - F(Q)(\nabla \psi_n \cdot x)) \, dx. \end{aligned}$$

D'après les égalités précédentes et le théorème de la divergence pour les boules (théorème II.31), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,R)} \left[\psi_n (NF(Q) - (N-2)(|\nabla Q|^2/2)) \right. \\
& \quad \left. + (\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) + (\nabla \psi_n \cdot x)(F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) \right] dx \\
&= \int_{B(0,R)} \operatorname{div}(\psi_n [F(Q)x + (x \cdot \nabla Q)\nabla Q - (|\nabla Q|^2/2)x]) dx \\
&= \frac{1}{R} \int_{\mathbb{S}(0,R)} (\psi_n [F(Q)\omega + (\omega \cdot \nabla Q)\nabla Q - (|\nabla Q|^2/2)\omega] \cdot \omega) d\sigma_{\mathbb{S}(0,R)}(\omega).
\end{aligned} \tag{II.27}$$

▷ *Étape 3* **Passage à la limite pour $R \rightarrow +\infty$**

Fixons $n \geq 1$ et faisons tendre R vers $+\infty$. Le support de ψ_n est inclus dans $B(0, R_0)$ pour un certain $R_0 > 0$. Si $R > R_0$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{S}(0,R)} (\psi_n [F(Q)\omega + (\omega \cdot \nabla Q)\nabla Q - (|\nabla Q|^2/2)\omega] \cdot \omega) d\sigma_{\mathbb{S}(0,R)}(\omega)$$

est nulle et l'intégrale

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,R)} \left[\psi_n (NF(Q) - (N-2)(|\nabla Q|^2/2)) \right. \\
& \quad \left. + (\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) + (\nabla \psi_n \cdot x)(F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) \right] dx
\end{aligned}$$

est égale à

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \left[\psi_n (NF(Q) - (N-2)(|\nabla Q|^2/2)) \right. \\
& \quad \left. + (\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) + (\nabla \psi_n \cdot x)(F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) \right] dx.
\end{aligned}$$

D'après l'égalité (II.27), cette dernière intégrale est nulle.

▷ *Étape 4* **Passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$**

Puisque $F(Q)$ et $|\nabla Q|^2$ sont intégrables sur \mathbb{R}^N et que $0 \leq \psi_n \leq 1$, le théorème de convergence dominée implique que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_n (NF(Q) - (N-2)(|\nabla Q|^2/2)) dx$$

converge vers

$$\int_{\mathbb{R}^N} (NF(Q) - (N-2)(|\nabla Q|^2/2)) dx$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) + (\nabla \psi_n \cdot x)(F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) dx.$$

Remarquons que :

- les fonctions intégrées convergent ponctuellement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ car le support de ψ_n est inclus dans $B[0, 2n] \setminus B(0, n)$;
- pour tout $n \geq 1$, on a

$$|(\nabla\psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q)| \leq |\nabla\psi_n| |x| |\nabla Q|^2 \leq c |\nabla Q|^2$$

et

$$\left| (\nabla\psi_n \cdot x) (F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) \right| \leq c (|F(Q)| + |\nabla Q|^2/2)$$

d'après les majorations (II.24).

Puisque $F(Q)$ et $|\nabla Q|^2$ sont intégrables sur \mathbb{R}^N , on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) \, dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\psi_n \cdot x) (F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) \, dx$$

convergent vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\psi_n (NF(Q) - (N-2)(|\nabla Q|^2/2)) + (\nabla\psi_n \cdot \nabla Q)(x \cdot \nabla Q) + (\nabla\psi_n \cdot x) (F(Q) - (|\nabla Q|^2/2)) \right] dx = 0,$$

les résultats précédents impliquent que

$$N \int_{\mathbb{R}^N} F(Q) \, dx = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q|^2 \, dx,$$

d'où l'identité de Pohožaev d'après la définition de F (voir (II.25)). \square

Proposition II.32. *Toutes les solutions $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de l'équation (EDP_Q) sont telles que*

$$\begin{cases} \|Q\|_{L^q}^q = \frac{1}{1-s} \|Q\|_{L^2}^2, \\ \|\nabla Q\|_{L^2}^2 = \frac{s}{1-s} \|Q\|_{L^2}^2 \end{cases}$$

où $s = N(q-2)/(2q)$ est l'exposant apparaissant dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (théorème II.12).

Démonstration. Il suffit d'appliquer les identités de l'énergie et de Pohožaev. \square

Dès lors, toutes les solutions non nulles de l'équation (EDP_Q) sont des solutions de l'équation $(\text{EDP}_{\mathcal{J}})$. D'après la proposition II.15, il s'agit de points critiques de \mathcal{J} .

Ces identités permettent aussi de montrer la proposition suivante.

Proposition II.33. *Il existe des constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ telles que toutes les solutions $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ non nulles de (EDP_Q) vérifient*

$$\|Q\|_{L^2} = c_1 \|Q\|_{L^q}^{\frac{q}{2}} = c_2 \|\nabla Q\|_{L^2} = c_3 \mathcal{J}(Q)^{\frac{1}{q-2}} = c_4 (\mathcal{A}(Q))^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, les solutions de (EDP_Q) qui atteignent le minimum de \mathcal{J} sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ et réalisent l'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg minimisent simultanément $\|Q\|_{L^2}$, $\|Q\|_{L^q}$, $\|\nabla Q\|_{L^2}$, $\mathcal{J}(Q)$ et $\mathcal{A}(Q)$ parmi les solutions de (EDP_Q) .

Démonstration. D'après la proposition (II.32), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(Q) &= \frac{\|Q\|_{L^2}^{q(1-s)} \|\nabla Q\|_{L^2}^{qs}}{\|Q\|_{L^q}^q} \\ &= \frac{\|Q\|_{L^2}^{q(1-s)} \left(\frac{s}{1-s}\right)^{qs/2} \|Q\|_{L^2}^{qs}}{\frac{1}{1-s} \|Q\|_{L^2}^2} \\ &= C \|Q\|_{L^2}^{q-2} \end{aligned}$$

où $C := s^{qs/2}(1-s)^{1-(qs/2)}$. De même, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Q) &= \frac{1}{2} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|Q\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{q} \|Q\|_{L^q}^q \\ &= \frac{s}{2(1-s)} \|Q\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|Q\|_{L^2}^2 - \frac{1}{q(1-s)} \|Q\|_{L^2}^2 \\ &= D \|Q\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

où $D := \frac{q-2}{2q(1-s)}$. Notons que $D > 0$ car $q > 2$ et $s < 1$. □

Remarque II.34. La terminologie *ground states* est souvent employée dans la littérature afin de désigner les solutions de (EDP_Q) qui réalisent le minimum global de \mathcal{J} . Il faut cependant se méfier d'une telle terminologie puisque, comme nous l'avons vu, ces solutions sont minimales en (au moins) cinq sens différents. Ainsi, il faut savoir quelle fonctionnelle est minimisée lorsqu'on emploie une telle expression, à moins de s'être au préalable assuré que les procédés de minimisations étaient « cohérents » comme l'assure la proposition précédente.

II.5 Cas « $q = 2^*$ », résultat de G. Talenti

Dans le cas limite « $q = 2^*$ » (où $N \geq 3$), on considère l'inégalité

$$\|u\|_{L^{2^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Ce cas a été traité par G. Talenti dans [38]. Citons son théorème principal.

Théorème II.35 (Talenti 1975). *Soit $N \geq 2$. Pour tout $p \in]1, N[$, il existe $C_p > 0$ tel que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p}$$

pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ où

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Les fonctions qui réalisent l'égalité sont données par

$$u(x) = \left(a + b|x - x_0|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1 - \frac{N}{p}}$$

où $a, b > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Remarque II.36. L'exposant p^* est l'exposant critique des plongements de Sobolev pour l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (voir le théorème A.41).

La preuve de Talenti utilise des techniques de réarrangement suivie d'une analyse unidimensionnelle en la variable radiale. Elle utilise notamment un résultat proche d'une inégalité unidimensionnelle due à Bliss (voir [38, 7, Lemma 2]). Cette inégalité permet notamment de montrer que l'espace $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ s'injecte dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ alors que les inégalités menant à l'injection compacte de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour $q \in]2, 2^*[$ ne permettent pas « naïvement » de prouver l'injection de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Grâce aux résultats du chapitre suivant concernant l'équation (EDP_Q), nous parviendrons à déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Nous obtiendrons ainsi un résultat semblable à celui de Talenti lorsque $q \in]2, 2^*[$.

Chapitre III

Propriétés qualitatives

Dans ce chapitre, nous poursuivrons l'étude en dimension $N \geq 2$ des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ de l'équation

$$-\Delta Q + Q = |Q|^{q-2}Q \quad (\text{EDP}_Q)$$

où $2 < q < 2^*$. Nous nous intéresserons en particulier aux *solutions* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *positives* de (EDP_Q) . Il s'agit par définition des solutions non nulles de cette équation qui sont positives sur \mathbb{R}^N .

Nous allons nous atteler successivement aux tâches qui suivent.

- Prouver que les solutions positives de l'équation (EDP_Q) sont strictement positives grâce au *principe du maximum*.
- Démontrer que les solutions positives de (EDP_Q) sont de classe C^∞ en utilisant une technique de *bootstrap* $C^{k,\theta}$.
- Prouver que toutes les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ positives de (EDP_Q) sont à *symétrie radiale*. Nous utiliserons la méthode du « *moving plane* » développée par B. Gidas, W.-M. Ni et L. Nirenberg dans [19]. Nous nous basons fortement sur la présentation de cet argument par T. Tao dans [40, Appendix B].
- Montrer que les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ à symétrie radiale de (EDP_Q) et leurs dérivées premières et secondes ont une *décroissance exponentielle* à l'infini. La preuve présentée est issue d'une discussion avec C. De Coster et C. Troestler à propos d'une démonstration de Strauss (voir [36, Theorem 3]). Le résultat de décroissance des dérivées est basé sur un article de H. Berestycki et P.L. Lions (voir [5, Lemma 2]).
- Montrer comment la preuve de l'unicité des solutions $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ positives de (EDP_Q) se ramène à l'étude d'une équation différentielle.

- Utiliser les résultats qui précèdent afin de déterminer toutes les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ d'énergie minimale de (EDP_Q) et en déduire tous les cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

III.1 Solutions positives

III.1.1 Stricte positivité

Théorème III.1. *Si Q est une solution positive de (EDP_Q) alors Q est strictement positive sur \mathbb{R}^N .*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $Q(x_0) = 0$. Pour tout $R > 0$, considérons $\Omega_R := B(x_0, R)$. Alors, $Q \geq 0$ sur $\partial\Omega_R$ et $-\Delta Q + Q = Q^{q-1} \geq 0$ sur Ω_R . Dès lors, d'après le principe du maximum fort pour l'opérateur $u \mapsto -\Delta u + u$ (voir le théorème B.1), Q s'annule sur Ω_R . Ceci étant vrai pour tout $R > 0$, on en déduit que Q s'annule sur \mathbb{R}^N . Nous obtenons ainsi une contradiction car Q est non nulle par hypothèse. \square

III.1.2 Régularité \mathcal{C}^∞

Nous allons montrer que les solutions positives de l'équation (EDP_Q) sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nous utiliserons une méthode de bootstrap comme pour le théorème de régularité (II.24), mais cette fois nous travaillerons dans les espaces de Hölder $\mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$ au lieu des espaces de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Nous utiliserons le résultat suivant concernant l'équation $-\Delta u + u = f$ dans les espaces de Hölder (cas particulier de [20, Theorem 6.17]).

Théorème III.2 (Théorie $\mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour l'équation $-\Delta u + u = f$). *Soient $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in]0, 1[$ et $f \in \mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ est une solution de l'équation $-\Delta u + u = f$ alors u appartient à $\mathcal{C}^{k+2,\theta}(\mathbb{R}^N)$.*

Théorème III.3. *Si Q est une solution positive de (EDP_Q) alors Q est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Soit Q une solution positive de (EDP_Q) . D'après le théorème II.24, Q est de classe $\mathcal{C}^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta \in]0, 1[$. Montrons que Q appartient à $\mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

C'est le cas pour $k \leq 2$. De plus, si Q appartient à $\mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$, Q est en particulier de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$. Donc Q^{q-1} est de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$ car Q est strictement positive sur \mathbb{R}^N . En particulier, Q est de classe $\mathcal{C}^{k-1,\theta}(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème III.2, on en déduit que Q appartient à $\mathcal{C}^{k+1,\theta}(\mathbb{R}^N)$.

En itérant ce raisonnement, on en déduit que Q appartient à $\mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in]0, 1[$. En particulier, Q est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. \square

Remarque III.4. Dans la preuve, nous pouvons nous permettre d'affaiblir un peu la régularité afin de ne pas utiliser de compositions dans les espaces de Hölder. Il s'agit uniquement d'une astuce pratique, qui suffit dans notre cas, puisqu'on gagne suffisamment de régularité à chaque étape.

Notons que nous n'avons pas employé les espaces $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$ mais uniquement les espaces $\mathcal{C}^{k,\theta}(\mathbb{R}^N)$. En effet, la non-linéarité fait intervenir la fonction $t \mapsto t^{q-1}$. Les dérivées d'ordre élevé de cette fonction font intervenir des exposants négatifs. Puisque la fonction Q converge vers 0 à l'infini, on ne s'attend pas à obtenir un contrôle uniforme de ces dérivées sur \mathbb{R}^N .

Une alternative à l'utilisation des espaces de Hölder consiste à faire un bootstrap $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ pour des $k \in \mathbb{N}$ de plus en plus grands en utilisant la théorie $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ pour l'équation $-\Delta u + u = f$. Comme pour les espaces de Hölder, on ne s'attend pas à obtenir des estimées globales sur \mathbb{R}^N à cause de puissances d'exposant négatif de Q .

III.1.3 Symétrie radiale, méthode du moving plane

L'opérateur laplacien $\Delta = \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_{ii}$ commute avec les translations. Il commute également avec les transformations orthogonales.

Proposition III.5. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in O(N)$, alors le laplacien de la fonction $v(x) := u(g \cdot x)$ au point $x \in \mathbb{R}^N$ est égal à $(\Delta u)(g \cdot x)$.*

Démonstration. Le laplacien de v au point x est donné par la trace de la matrice hessienne $(\partial_{ij}v(x))_{1 \leq i,j \leq N}$. Par dérivation en chaîne, cette matrice est égale au produit

$$g^T (\partial_{ij}u(g \cdot x))_{1 \leq i,j \leq N} g$$

où T désigne la transposition. On conclut puisque la matrice $g^T g$ est égale à la matrice identité (car g est une matrice orthogonale) et car

$$\text{trace}(gh) = \text{trace}(hg)$$

pour tout couple de matrices g, h de taille $N \times N$. \square

Proposition III.6. Soient $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution positive non-nulle de (EDP_Q) et $\xi \in \mathbb{S}(0, 1)$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que Q est symétrique par rapport à l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot \xi = t\}$.

Démonstration. \triangleright **Étape 1 Introduction d'un paramètre « temporel »**

Étant donné $t \in \mathbb{R}$, considérons le demi-espace fermé H_t défini par

$$H_t := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot \xi \geq t\}.$$

La réflexion orthogonale $\sigma_{\partial H_t}$ par rapport à ∂H_t est donnée par

$$\sigma_{\partial H_t}(x) = x - 2(x \cdot \xi - t)\xi$$

d'après la proposition I.43.

Pour la suite de l'argument, il est utile de paramétriser tous les espaces H_t par un même demi-espace. On pose $H := H_0$ (pour alléger les notations), autrement dit, $H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot \xi \geq 0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $\sigma_{\partial H}(x) = x - 2(x \cdot \xi)\xi$. Remarquons que si $x \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$, on a les liens suivants entre H_t et H et entre leurs symétries associées :

$$\begin{aligned} H_t &= \{t\xi + x \mid x \in H\}, \\ \sigma_{\partial H_t}(t\xi + x) &= (t\xi + x) - 2((t\xi + x) \cdot \xi - t)\xi = t\xi + \sigma_{\partial H}(x). \end{aligned}$$

On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ une fonction $u_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u_t(x) := Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x)) - Q(t\xi + x). \quad (\text{III.1})$$

D'après les calculs qui précèdent, la fonction u_t s'annule sur H si et seulement si Q est symétrique par rapport à ∂H_t . Puisque Q est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et converge vers 0 à l'infini ainsi que ses dérivées premières (d'après les théorèmes II.24 et III.3), u_t possède ces mêmes propriétés. De plus, u_t s'annule sur ∂H .

Remarquons finalement que u_s converge uniformément en x vers u_t lorsque $s \rightarrow t$. En effet, Q est uniformément continue sur \mathbb{R}^N car Q est continue et converge vers 0 à l'infini. De même, ∇u_s converge uniformément en x vers ∇u_t lorsque $s \rightarrow t$ puisque les dérivées premières de Q sont des fonctions continues convergeant vers 0 à l'infini.

\triangleright **Étape 2 EDP satisfaite par u_t**

Le laplacien de la fonction $x \mapsto Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x))$ au point $x \in \mathbb{R}^N$ est égal à $(\Delta Q)(t\xi + \sigma_{\partial H}(x))$ car le laplacien commute avec les translations et les

transformations orthogonales (voir la proposition III.5). D'après l'équation (EDP_Q), on en déduit que

$$\begin{aligned} -\Delta u_t(x) &= [(Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x)))^{q-1} - (Q(t\xi + x))^{q-1}] \\ &\quad - [Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x)) - Q(t\xi + x)] \\ &= [(Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x)))^{q-1} - (Q(t\xi + x))^{q-1}] - u_t(x). \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto t^p$, il existe une fonction $\theta(a, b)$ telle que l'égalité

$$(b - a)\theta(a, b) = b^p - a^p$$

est vérifiée pour tout $a, b > 0$ et telle que

$$|\theta(a, b)| \leq p \max(a, b)^{p-1}. \quad (\text{III.3})$$

En prenant $a = Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x))$, $b = Q(t\xi + x)$ et $p = q - 1$, l'égalité (III.2) se réécrit comme

$$-\Delta u_t(x) = u_t(x) [\theta(Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x)), Q(t\xi + x)) - 1]. \quad (\text{III.4})$$

▷ *Étape 3 Conséquence de la non-positivité de u_t sur H*

Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que u_t est strictement négative en un point de H . Puisque u_t s'annule sur ∂H , est continue et converge vers 0 à l'infini, il existe un point x_t à l'intérieur de H tel que $u(x_t) = \min_{x \in H} u(x)$. En ce point, on a $u_t(x_t) < 0$ et $-\Delta u_t(x_t) \leq 0$. D'après l'égalité (III.4), on en déduit que

$$\theta(Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x_t)), Q(t\xi + x_t)) \geq 1.$$

La majoration (III.3) implique que

$$(q - 1) \max(Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x_t)), Q(t\xi + x_t))^{q-2} \geq 1.$$

Puisque $u_t(x_t) < 0$ et vu la définition de u_t , on a

$$Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x_t)) < Q(t\xi + x_t).$$

On obtient donc

$$Q(t\xi + x_t) \geq (q - 1)^{\frac{-1}{q-2}},$$

ce qui implique que

$$|t\xi + x_t| \leq R(p, Q) \quad (\text{III.5})$$

pour une certaine constante $R(p, Q) > 0$ puisque Q converge vers 0 à l'infini (voir le théorème II.24). Notons que la constante $R(p, Q)$ est indépendante de t , ce qui sera important dans la suite de la preuve.

▷ *Étape 4* « **Induction continue** » sur le paramètre t
 Considérons l'ensemble

$$\mathcal{T} := \{t_0 \in \mathbb{R} \mid \forall t \geq t_0, u_t \geq 0 \text{ sur } H\}.$$

Remarquons que :

- si $t_0 \in \mathcal{T}$, alors pour tout $s_0 \geq t_0$, on a $s_0 \in \mathcal{T}$;
- l'ensemble \mathcal{T} est fermé, par continuité en t de u_t ;
- l'ensemble \mathcal{T} est non vide. Montrons que l'intervalle $]R(p, Q), +\infty[$ est inclus dans \mathcal{T} . En effet, sinon il existe $t > R(p, Q)$ et $x_t \in H$ atteignant le minimum global de u_t sur H et tel que $u(x_t) < 0$. De plus, on a

$$(t\xi + x_t) \cdot \xi = t + x_t \cdot \xi \geq t$$

car x_t appartient à H et ξ est de norme 1. Donc $|t\xi + x_t| \geq t > R(p, Q)$, ce qui contredit l'inégalité (III.5) ;

- l'ensemble \mathcal{T} n'est pas égal à \mathbb{R} . En effet, sinon u_t est positive sur H pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'on a

$$Q(t\xi + \sigma_{\partial H}(x)) \geq Q(t\xi + x) \tag{III.6}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$. Montrons que (III.6) implique que Q est nulle. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Si s est suffisamment grand, $x_0 + s\xi$ appartient à H . Dans ce cas, on prend $x = x_0 + s\xi$ et $t = -s$ dans (III.6). Puisque $\sigma_{\partial H}(x) = \sigma_{\partial H}(x_0) - s\xi$, on obtient

$$Q(\sigma_{\partial H}(x_0) - 2s\xi) \geq Q(x_0).$$

Or, $Q(\sigma_{\partial H}(x_0) - 2s\xi)$ converge vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$ puisque Q converge vers 0 à l'infini. Donc $Q(x_0) = 0$.

D'après les points précédents, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{T} = [t, +\infty[$.

▷ *Étape 5* **Symétrie de Q par rapport à ∂H_t**

Considérons la suite $(t_n)_{n \geq 1} := (t - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$. Vu que t_n n'appartient pas à \mathcal{T} et d'après les résultats de l'étape 3, u_{t_n} admet un minimum global $x_{t_n} \in H$ tel que $u_{t_n}(x_{t_n}) < 0$ et $|t_n\xi + x_{t_n}| \leq R(p, Q)$.

La suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est bornée car elle converge vers t . La suite $(x_{t_n})_{n \geq 1}$ est aussi bornée (car $(t_n\xi + x_{t_n})_{n \geq 1}$ l'est). Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que x_{t_n} converge vers un certain $x_* \in \mathbb{R}^N$. L'ensemble H étant fermé, x_* appartient à H . Étant donné que $u_{t_n}(x_{t_n}) < 0$, que $u_{t_n}(x_{t_n})$ converge vers $u_t(x_*)$ et que $u_t \geq 0$ sur H car $t \in \mathcal{T}$, on en déduit que $u_t(x_*) = 0$. Par conséquent, x_* est un minimum global de u_t sur H .

D'après l'égalité (III.4), la majoration (III.3) et vu que Q est bornée sur \mathbb{R}^N , il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta u_t(x) + k u_t(x) \geq 0 \quad (\text{III.7})$$

pour tout $x \in H$. On distingue deux cas.

- Si x_* appartient à l'intérieur de H , le principe du maximum fort pour les fonctions positives appliqué à (III.7) (voir le théorème B.2) implique que u_t s'annule sur H .
- Si x_* appartient au bord de H alors, d'après le lemme de Hopf pour les fonctions positives (voir le théorème B.4) appliqué à (III.7), on a $\xi \cdot \nabla u_t(x_*) > 0$. On pose $a := \xi \cdot \nabla u_t(x_*)$.

Par convergence uniforme de ∇u_s vers ∇u_t lorsque $s \rightarrow t$ (voir la fin de l'étape 1), il existe $\delta > 0$ tel que $\xi \cdot \nabla u_s(x) \geq \frac{a}{2}$ pour tout $s \in [t - \delta, t + \delta]$ et tout $x \in H \cap B(x^*, \delta)$.

Soit $s \in [t - \delta, t + \delta]$. Étant donné que u_s s'annule sur le bord de H (qui est orthogonal à ξ) et que $\xi \cdot \nabla u_s(x) > 0$ sur $H \cap B(x^*, \delta)$, on en déduit que u_s est strictement positive sur $B(x^*, \delta) \cap \text{int}H$.

Vu que t_n converge vers t , il existe $n_0 \geq 1$ tel que t_n appartient à $[t - \delta, t + \delta]$ et x_{t_n} appartient à $B(x^*, \delta) \cap \text{int}H$ pour tout $n \geq n_0$. Si $n \geq n_0$, on a $u_{t_n}(x_{t_n}) > 0$, ce qui contredit la stricte négativité de $u_{t_n}(x_{t_n})$.

Ainsi, on se trouve nécessairement dans le premier cas, la fonction u_t s'annule sur H et la fonction Q est symétrique par rapport à l'hyperplan affine ∂H_t . \square

Corollaire III.7 (Symétrie radiale des solutions de (EDP_Q) , à translation près [40, Corollary B.9]). *Soit Q une solution positive de (EDP_Q) , alors Q est la translatée d'une fonction à symétrie radiale.*

Démonstration. Nous allons utiliser plusieurs fois la proposition III.6.

▷ **Étape 1 Translation de Q**

Appliquons la proposition III.6 avec ξ égal à chacun des vecteurs e_1, \dots, e_N de la base canonique de \mathbb{R}^N . En translatant Q , on peut supposer que Q est symétrique par rapport à tous les hyperplans $\{x \in \mathbb{R}^N \mid x_j = 0\}$ où $1 \leq j \leq N$. En particulier, $Q(x) = Q(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

▷ **Étape 2 Symétrie de Q par rapport à tous les hyperplans passant par l'origine**

Soit $\xi \in \mathbb{S}(0, 1)$. D'après la proposition III.6, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que Q est symétrique par rapport à l'hyperplan $\Pi_t := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot \xi = t\}$. Montrons que $t = 0$, c'est-à-dire que l'hyperplan Π_t passe par l'origine.

Supposons par l'absurde que $t \neq 0$. En utilisant alternativement la symétrie de Q par rapport à Π_t et l'égalité $Q(x) = Q(-x)$, on obtient

$$Q(0) = Q(2t\xi) = Q(-2t\xi) = Q(4t\xi) = Q(-4t\xi) = Q(6t\xi) = Q(-6t\xi) = \dots$$

En itérant, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q(2kt\xi) = Q(-2kt\xi) = Q(0)$. Comme $Q(0) > 0$ (car Q est strictement positive sur \mathbb{R}^N d'après le théorème III.1), ceci contredit la convergence de Q vers 0 à l'infini.

▷ *Étape 3 Conclusion*

Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $x \neq y$ et $|x| = |y|$. Puisque $|x| = |y|$, l'hyperplan médiateur du segment $[x, y]$ passe par 0 (voir la définition I.64 et le lemme I.66). Dès lors, $u(x) = u(y)$ puisque u est symétrique par rapport à cet hyperplan. Donc u est radiale. \square

III.2 Solutions radiales

Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution radiale de (EDP_Q) , par exemple une solution positive de (EDP_Q) d'après les résultats de la section précédente (mais pas nécessairement).

D'après le résultat de régularité prouvé dans le chapitre précédent (théorème II.24), Q est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ et converge vers 0 à l'infini ainsi que ses dérivées premières et secondes.

L'hypothèse de radialité permet d'écrire $Q(x) = u(|x|)$ pour une certaine fonction u . On notera la variable de u par t , ce qui sera utile pour avoir une interprétation « dynamique » des raisonnements. La fonction $t \mapsto u(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2([0, +\infty[)$ et est telle que

$$\partial_t u(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \partial_t u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \partial_{tt} u(t) = 0. \quad (\text{III.8})$$

Si $1 \leq i, j \leq N$ et $x \in \mathbb{R}^N$, alors on a

$$\partial_i Q(x) = \frac{\partial_t u(|x|) x_i}{|x|}, \quad \partial_{ij} Q(x) = \begin{cases} \partial_{tt} u(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \partial_t u(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} & \text{si } i = j, \\ \partial_{tt} u(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \partial_t u(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^3} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

En particulier, le laplacien de Q est donné par

$$\Delta Q(x) = \partial_{tt} u(|x|) + \frac{N-1}{|x|} \partial_t u(|x|).$$

D'après ce qui précède et puisque Q est solution de (EDP_Q) , u est solution de l'EDO

$$\partial_{tt}u(t) + \frac{N-1}{t}\partial_tu(t) + |u(t)|^{q-2}u(t) - u(t) = 0, \quad (\text{EDO}_u)$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$, avec les conditions initiales

$$u(0) = Q(0), \quad \partial_tu(0) = 0.$$

III.2.1 Interprétation physique du problème, énergie

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t) + \frac{N-1}{t}\partial_tu(t) + |u(t)|^{q-2}u(t) - u(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = y, \quad \partial_tu(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{EDO}_{u,y})$$

Remarque III.8. Malgré la singularité en $t = 0$, on peut montrer de façon semblable à la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz usuel que ce problème de Cauchy admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[)$ pour toute condition initiale $y \in \mathbb{R}$ (voir par exemple [24, Chapter 4, Section 19]).

L'équation (EDO_u) se réécrit comme

$$\partial_{tt}u(t) = -\frac{N-1}{t}\partial_tu(t) - V'(u(t))$$

où

$$V(u) := \frac{1}{q}|u|^q - \frac{1}{2}u^2.$$

Dès lors, on peut interpréter $u(t)$ comme la position au temps t d'une particule de masse 1 dans le puits de potentiel V soumise à une force de friction (dépendant de la vitesse et du temps) $-\frac{N-1}{t}\partial_tu$ et initialement au repos à la position y au temps $t = 0$. En effet, la dérivée de V en $u \in \mathbb{R}$ est donnée par $V'(u) = |u|^{q-2}u - u$ donc la « force » $|u|^{q-2}u - u$ dérive du potentiel V .

Un graphe du potentiel est présenté dans la figure III.1. Les deux racines non nulles (d'abscisses $-r$ et r où $r = r := (q/2)^{1/(q-2)}$) et les deux minima locaux (d'abscisses -1 et 1) du potentiel sont également indiqués.

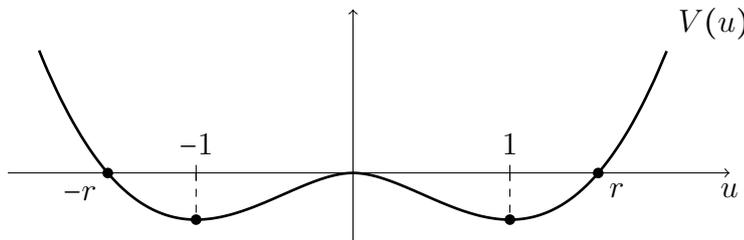


FIGURE III.1 – Graphe de $V(u)$.

Remarquons que le potentiel V converge vers $+\infty$ lorsque $u \rightarrow -\infty$ ou $u \rightarrow +\infty$. En particulier, V est borné inférieurement sur \mathbb{R} .

On définit l'énergie totale de la particule au temps t comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Comme l'indique le lemme suivant, la particule perd de l'énergie sous l'effet de la force de friction.

Lemme III.9 (Décroissance de l'énergie). *Soient $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq +\infty$. Si $u \in \mathcal{C}^1([T_0, T_1[)$ est une solution de l'équation (EDO $_u$), alors la fonction*

$$[T_0, T_1[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{2}(\partial_t u(t))^2 + V(u(t))$$

est décroissante.

Démonstration. Soit $t \in]T_0, T_1[$. D'après l'équation (EDO $_u$), on a

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2}(\partial_t u(t))^2 + V(u(t)) \right) &= \partial_t u(t) \partial_{tt} u(t) + V'(u(t)) \partial_t u(t) \\ &= \partial_t u(t) \left(-\frac{N-1}{t} \partial_t u(t) \right) \\ &= -\frac{N-1}{t} (\partial_t u(t))^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire III.10. *Soient $T > 0$, $y \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}^1([0, T])$ une solution du problème de Cauchy (EDO $_{u,y}$). Alors il existe une constante $C(y) > 0$ indépendante de T telle que pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$|u(t)| \leq C(y), \quad |\partial_t u(t)| \leq C(y).$$

Démonstration. D'après le lemme de décroissance de l'énergie, on a

$$\frac{1}{2}(\partial_t u(t))^2 + V(u(t)) \leq V(y)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Dès lors, la fonction $t \mapsto u(t)$ est majorée sur $[0, T]$ par une constante ne dépendant que de y car $V(u(t)) \leq V(y)$ et car V converge vers $+\infty$ lorsque $u \rightarrow -\infty$ ou $u \rightarrow +\infty$. De plus, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$|\partial_t u(t)| \leq \sqrt{2(V(y) - \inf_{z \in \mathbb{R}} V(z))}. \quad \square$$

III.2.2 Décroissance exponentielle

Théorème III.11. Soit $T_0 \geq 0$. Si $u \in \mathcal{C}^2([T_0, +\infty[)$ est une solution non nulle de l'équation (EDO_u) telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \partial_t u(t) = 0,$$

alors pour tout $\delta \in]0, 1[$, il existe $T \geq T_0$ tel que la fonction $t \mapsto |u(t)|$ est strictement positive et strictement décroissante sur $[T, +\infty[$ et pour tout $t \geq T$, on a

$$0 < |u(t)| \leq |u(T)|e^{-\delta(t-T)}.$$

Démonstration. Pour tout $t \in [T_0, +\infty[$, on pose $E(t) := \frac{1}{2}(\partial_t u(t))^2 + V(u(t))$. La fonction $t \mapsto E(t)$ est décroissante (voir le lemme III.9).

Puisque u et $\partial_t u$ convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$, la fonction $E(t)$ converge vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Dès lors, on en déduit que pour tout $t \geq T_0$, on a $E(t) \geq 0$, c'est-à-dire

$$(\partial_t u(t))^2 \geq u(t)^2 - \frac{2}{q}|u(t)|^q.$$

Soit $\delta \in]0, 1[$. Il existe $T \geq T_0$ tel que pour tout $t \geq T$, on a

$$\frac{2}{q}|u(t)|^{q-2} \leq 1 - \delta^2.$$

Dès lors, pour tout $t \geq T$, on obtient

$$(\partial_t u(t))^2 \geq \delta^2(u(t))^2. \quad (\text{III.10})$$

Ceci implique que $\partial_t u(t) \neq 0$ pour tout $t \geq T$. En effet sinon l'inégalité précédente impliquerait que $u(t) = \partial_t u(t) = 0$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (EDO_u) , u serait identiquement nulle, ce qui est exclu par hypothèse. La fonction $\partial_t u$ ne change donc pas de signe et, par conséquent, $u(t)$ converge de manière strictement monotone vers 0. Dès lors, on en déduit que :

- soit pour tout $t \geq T$, on a $\partial_t u(t) < 0$ et $u(t) > 0$;
- soit pour tout $t \geq T$, on a $\partial_t u(t) > 0$ et $u(t) < 0$.

Considérons le premier cas, le deuxième est similaire. Pour tout $t \geq T$, l'inégalité (III.10) implique que

$$-\partial_t u(t) \geq \delta u(t)$$

d'où

$$\frac{\partial_t u(t)}{u(t)} \leq -\delta.$$

En intégrant les deux membres de cette dernière inégalité de T à t , on en déduit que pour tout $t \geq T$, on a

$$\ln u(t) - \ln u(T) \leq -\delta(t - T)$$

d'où

$$u(t) \leq u(T)e^{-\delta(t-T)}. \quad \square$$

Remarque III.12. Le terme en u dans l'équation (EDO_u) est important afin d'obtenir des majorations exponentielles. En effet, l'EDO

$$\partial_{tt}u(t) + \frac{N-1}{t}\partial_t u(t) = 0$$

admet la solution

$$u(t) = \begin{cases} \ln(t) & \text{si } N = 2, \\ t^{2-N} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Alors u est de classe $\mathcal{C}^\infty([1, +\infty[)$, de plus u et toutes ses dérivées convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ mais u ne converge pas exponentiellement vers 0 à l'infini.

Théorème III.13. *Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution radiale de l'équation (EDP_Q) , alors, pour tout $\delta \in]0, 1[$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a*

$$|\partial^\alpha Q(x)| \leq ke^{-\delta|x|}.$$

Démonstration. On écrit $Q(x) = u(|x|)$. Alors u est solution de (EDO_u) . En exprimant les dérivées de Q en fonction de celles de u (voir les égalités (III.9)), on doit montrer que u , $\partial_t u$ et $\partial_{tt}u$ décroissent exponentiellement. On sait déjà que u , $\partial_t u$ et $\partial_{tt}u$ convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ (voir les égalités (III.8)).

Soit $\delta \in]0, 1[$. Remarquons qu'il suffit de prouver des majorations asymptotiques : en effet, si une fonction continue $v \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ est telle que $|v(t)| \leq ke^{-\delta t}$ pour tout $t \geq T$ où $T > 0$, alors en prenant

$$\tilde{k} := \max\left(k, \sup_{t \in [0, T]} |v(t)|e^{\delta t}\right),$$

on a $|v(t)| \leq \tilde{k}e^{-\delta t}$ pour tout $t \geq 0$.

D'après le théorème III.11, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, on a

$$|u(t)| \leq |u(T)|e^{-\delta(t-T)}. \quad (\text{III.11})$$

Pour la majoration exponentielle de $\partial_t u$, il est utile de réécrire l'équation (EDO_u) comme

$$\partial_t(t^{N-1}\partial_t u)(t) = t^{N-1}u(t)(1 - |u(t)|^{q-2}).$$

En intégrant les deux membres de l'égalité entre t_1 et t_2 ($T \leq t_1 < t_2 < +\infty$), on obtient

$$t_2^{N-1}\partial_t u(t_2) - t_1^{N-1}\partial_t u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} s^{N-1}u(s)(1 - |u(s)|^{q-2}) ds. \quad (\text{III.12})$$

En faisant tendre t_2 vers $+\infty$ et puisque u converge exponentiellement vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$, on en déduit que la fonction $t \mapsto t^{N-1}\partial_t u(t)$ admet une limite $c \in \mathbb{R}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Montrons que $c = 0$. Supposons par l'absurde que $c > 0$ (le cas $c < 0$ est similaire). Il existe $\tilde{T} > 0$ tel que $t^{N-1}\partial_t u(t) \geq \frac{c}{2}$ pour tout $t \geq \tilde{T}$. La fonction croît donc vers 0 sur $[\tilde{T}, +\infty[$, d'où $u(t) < 0$ pour tout $t \geq \tilde{T}$. Dès lors, on a

$$|u(t)| = -u(t) = \int_t^{+\infty} \partial_t u(s) ds \geq \frac{c}{2} \int_t^{+\infty} s^{1-N} ds,$$

ce qui contredit la décroissance exponentielle de u .

D'après ce qui précède, on a

$$t^{N-1}\partial_t u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En prenant $t_1 = t$ et en faisant tendre t_2 vers $+\infty$ dans l'égalité (III.12), on obtient

$$-t^{N-1}\partial_t u(t) = \int_t^{+\infty} s^{N-1}u(s)(1 - |u(s)|^{q-2}) ds \quad (\text{III.13})$$

pour tout $t \geq T$.

Soit $\delta' > 0$ suffisamment petit pour que $\delta + \delta' < 1$. Quitte à prendre T plus grand, on peut supposer que $|u(T)| \leq 1$, que la majoration (III.11) soit valable pour $\delta + \delta'$, c'est-à-dire que $|u(t)| \leq e^{-(\delta+\delta')(t-T)} \leq 1$ pour $t \geq T$, et que $t^{N-1}e^{-\delta' t} \leq 1$ pour $t \geq T$. Avec ces informations, (III.13) implique

$$\begin{aligned} \forall t \geq T, \quad |\partial_t u(t)| &\leq t^{1-N}e^{(\delta+\delta')T} \int_t^{+\infty} s^{N-1}e^{-\delta's}e^{-\delta s} ds \\ &\leq T^{1-N}e^{(\delta+\delta')T} \int_t^{+\infty} e^{-\delta s} ds, \end{aligned}$$

d'où la majoration exponentielle de $\partial_t u$.

Finalement, la majoration exponentielle de $\partial_{tt} u$ se déduit de celles de u et de $\partial_t u$ d'après l'équation (EDO_u). \square

Remarque III.14. Il est possible d'utiliser des hypothèses d'intégrabilité de Q pour prouver des résultats de décroissance exponentielle sur Q si on ne sait pas a priori que Q et ses dérivées premières convergent vers 0 à l'infini (voir [5, 36, Lemma 2]).

En fait, on peut se passer de l'hypothèse de radialité. Ainsi, on peut montrer que si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de l'équation (EDP_Q) alors il existe $k > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$|Q(x)| \leq ke^{-\delta|x|}, \quad |\partial_i Q(x)| \leq ke^{-\delta|x|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ (voir [13, Theorem 8.1.1 (ii)]).

III.2.3 Unicité des solutions positives

Jusqu'à présent nous avons montré que, si $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution positive de (EDP_Q) , alors Q est strictement positive, de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et converge exponentiellement vers 0 à l'infini ainsi que ses dérivées premières et secondes.

Dans cette section, nous verrons que l'unicité des solutions positives de (EDP_Q) se ramène à l'étude des solutions du problème de Cauchy $(\text{EDO}_{u,y})$.

À partir de maintenant, on ne s'intéressera plus qu'aux positions initiales y strictement positives et on notera u_y l'unique solution $\mathcal{C}^2([0, +\infty[)$ du problème de Cauchy $(\text{EDO}_{u,y})$ (une telle solution existe et est unique, voir la remarque III.8).

La définition suivante permet de distinguer les comportements possibles des solutions et intervient dans plusieurs études d'équations différentielles liées aux solutions radiales d'EDP (voir [40, 29, 6, Appendix B]).

Définition III.15 (Positions sous-critiques, critiques et super-critiques).

On dit qu'une position $y > 0$ est :

- *sous-critique* si $\inf_{t>0} u_y(t) > 0$;
- *critique* si $\inf_{t>0} u_y(t) = 0$;
- *super-critique* si $\inf_{t>0} u_y(t) < 0$.

Pour prouver l'unicité des solutions positives, il suffit de montrer qu'au plus une position y est critique.

L'interprétation physique du problème est utile pour l'intuition. On étudie la trajectoire d'une particule lâchée au repos dans le puits de potentiel à partir de la position y et se déplaçant sous l'effet du potentiel. La particule

est ralentie sous l'effet de la force de friction $-\frac{N-1}{t}\partial_t u$, dont l'effet est de plus en plus faible avec le temps.

La situation est la suivante (se référer à la figure III.1).

- Si y est à gauche de la racine positive r du potentiel, alors la particule possède initialement une énergie négative. Elle va redescendre dans le puits de potentiel et se rapprocher de la position d'abscisse 1. Une telle position y est donc sous-critique. Le même comportement a lieu pour les positions y à droite de r mais suffisamment proches de r .
- Pour une position y_c particulière à droite de r , la particule va se déplacer vers la gauche, dépasser r et atteindre asymptotiquement la position 0 avec une vitesse de plus en plus faible. Ce cas correspond à l'unique position critique y_c .
- Si y est à droite de cette position y_c , alors la particule a suffisamment d'énergie pour dépasser la position $u = 0$ par la droite en un temps fini. Ce cas correspond aux positions sur-critiques.

Les figures III.2 et III.3 illustrent le comportement des solutions.

D'une part, des portraits de phase (d'axes u et $\partial_t u$) représentent l'évolution des positions et des vitesses de particules partant au repos d'une position initiale y . Sur ces portraits de phase :

- les courbes d'énergie constante sont indiquées en grisé. Elles sont symétriques par rapport aux deux axes des graphiques car l'énergie

$$(\partial_t u(t))^2 + V(u(t))$$

est inchangée si on change le signe de u (car le potentiel V est une fonction paire) ou de $\partial_t u$;

- les courbes $t \mapsto (u_y(t), \partial_t u_y(t))$ pour différentes positions initiales $y > 0$ sont représentées en couleur.

La figure III.2 concerne les solutions sous-critiques et critique. On constate que lorsque la position initiale y est suffisamment petite, la solution u_y correspondante converge vers 1. Pour la position y critique, la solution u_y (tracée en noir) converge vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ces propriétés sont également visibles sur le graphique des solutions en fonction de t .

La figure III.3 concerne les solutions sur-critiques. On constate qu'il existe des solutions u_y admettant plusieurs racines et convergeant vers -1 ou 1 lorsque $t \rightarrow +\infty$. On peut montrer qu'il existe des solutions u_y admettant un nombre arbitrairement grand de racines et convergeant vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ (ces solutions correspondent à des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ non positives de l'équation (EDP_Q), nous en reparlerons dans la conclusion du chapitre).

Le théorème suivant reprend une partie des résultats affirmés dans la discussion précédente.

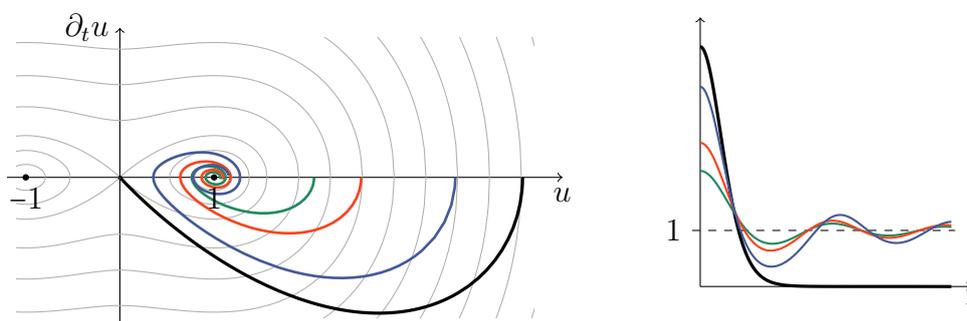


FIGURE III.2 – Solutions sous-critiques et critique.

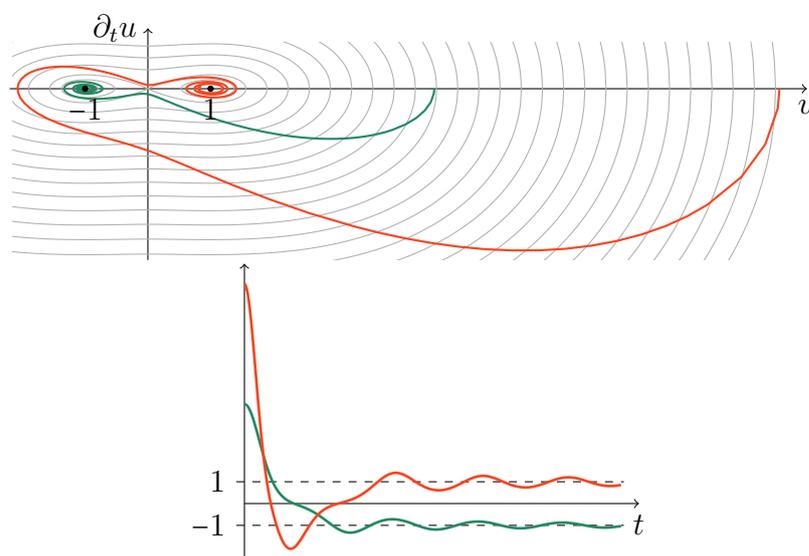


FIGURE III.3 – Solutions sur-critiques.

Théorème III.16. *Il existe exactement une position $y_c > 0$ critique. Toutes les positions y telles que $0 < y < y_c$ sont sous-critiques. Toutes les positions y telles que $y_c < y$ sont super-critiques.*

Il n'est pas aisé de prouver les propriétés énoncées précédemment. Le théorème III.16 a été démontré pour la première fois en toute dimension et pour tout $q \in]2, 2^*[$ par Kwong en 1988 (voir [25]). Une preuve plus courte et plus générale a été proposée par McLeod en 1993 (voir [29]) et est présentée dans le cas de $(EDO_{u,y})$ dans [40, Appendix B].

Théorème III.17. *La solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ positive de l'équation (EDP_Q) est unique à translation près.*

Remarque III.18. Signalons qu'on peut prouver des résultats *d'existence* de solutions radiales à des équations aux dérivées partielles à partir d'études d'équations différentielles. Ces techniques permettent de remplacer l'approche variationnelle présentée dans le chapitre précédent. Cette démarche est présentée dans l'article [6] de Berestycki, Lions et Peletier. Notons que des propriétés d'intégrabilité des solutions (par exemple l'appartenance à $H^1(\mathbb{R}^N)$) peuvent s'obtenir à partir de résultats de décroissance exponentielle de la solution de l'EDO tels que ceux présentés dans le théorème III.13.

III.3 Conclusion

III.3.1 Cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Théorème III.19 (Ground states de l'équation (EDP_Q)). *Les ground states de l'équation (EDP_Q) , c'est-à-dire les solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ non nulles de l'équation (EDP_Q) qui atteignent le minimum global de la fonctionnelle*

$$\mathcal{J}(u) := \frac{\|u\|_{L^2}^{q(1-s)} \|\nabla u\|_{L^2}^{qs}}{\|u\|_{L^q}^q},$$

sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mu Q(x - x_0)$ où Q est l'unique solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ radiale positive de l'équation (EDP_Q) , $\mu \in \{-1, 1\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Démonstration. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ une solution de (EDP_Q) atteignant le minimum global de \mathcal{J} . Par définition de \mathcal{J} et puisque le passage à la valeur absolue préserve la norme L^2 du gradient (voir la proposition A.31), $|u|$ est également un minimum global de \mathcal{J} . La proposition II.15 implique que $|u|$ est une solution de l'équation

$$-\Delta |u| + \frac{(1-s)\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^2}^2} |u| = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^q}^q} |u|^{q-1}.$$

Puisque u est une solution de l'équation (EDP_Q) , la proposition II.32 implique que

$$\frac{(1-s)\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^2}^2} = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^q}^q} = 1.$$

Donc $|u|$ est une solution $H^1(\mathbb{R}^N)$ positive de l'équation (EDP_Q) . D'après le théorème III.17, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $|u(x)| = Q(x - x_0)$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Puisque u est continue et que Q ne s'annule pas, on en déduit que $u(x) = Q(x - x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ ou que $u(x) = -Q(x - x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. \square

Théorème III.20 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg). *Les minima globaux sur $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ de la fonctionnelle \mathcal{J} sont les fonctions de la forme*

$$u(x) = \mu Q(\lambda(x - x_0))$$

où $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Il s'agit exactement des fonctions $H^1(\mathbb{R}^N)$ non nulles qui réalisent le cas d'égalité dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

Démonstration. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ une fonction atteignant le minimum global de \mathcal{J} . La proposition II.15 implique que u est solution de l'équation

$$-\Delta u + \frac{(1-s)\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^2}^2}u = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{s\|u\|_{L^q}^q}|u|^{q-2}u.$$

Il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que la fonction $x \mapsto \mu|u(\lambda x)|$ est solution de l'équation (EDP $_Q$) et est un minimum global de \mathcal{J} (car \mathcal{J} est invariante par dilatations et homothéties). La conclusion s'ensuit d'après le théorème III.19. \square

III.3.2 Autres solutions de l'équation

Signalons que l'équation (EDP $_Q$) possède également des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui changent de signe. Ainsi,

- pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe des solutions $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ données par $Q(x) = u(|x|)$ où u possède exactement m racines (voir [45, théorème 4.6 et corollaire 4.8, 4, théorème 2.1]);
- si $N = 4$ ou $N \geq 6$, il existe une infinité de solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$ de (EDP $_Q$) qui ne sont pas radiales à symétrie près et dont aucune n'est une translatée d'une autre (voir [45, théorème 1.31 et théorème 3.13, 3, théorème 2.1]).

D'après les résultats de ce chapitre, aucune de ces solutions n'est positive.

Annexes

Annexe A

Fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact, convolution, espaces de Sobolev et espaces de Hölder

Cette annexe est basée principalement sur les livres d'analyse fonctionnelle de M. Willem et de H. Brézis [44, 9]. Nous ne définissons que des espaces de fonctions à valeurs réelles. On définit de façon analogue des espaces de fonctions à valeurs complexes.

Dans les sections qui suivent, le naturel non nul N désigne la dimension de l'espace \mathbb{R}^N et Ω désigne un ouvert non-vide de \mathbb{R}^N .

A.1 Fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact

Définition A.1 (Support d'une fonction, espaces $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$). Le *support* d'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}},$$

où l'adhérence est prise relativement à Ω . Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on pose

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid \text{supp } u \text{ est compact dans } \Omega\}.$$

On notera simplement $\mathcal{C}_c(\Omega) := \mathcal{C}_c^0(\Omega)$.

Le lemme suivant permet de construire des fonctions \mathcal{C}_c^∞ .

Lemme A.2. *La fonction*

$$f(x) := \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est infiniment dérivable sur \mathbb{R} , strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et son support est égal à $[0, +\infty[$.

Démonstration. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ de dérivée n^e donnée par

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

où les P_n sont des applications polynomiales. Pour $n = 0$, prenons $P_0(x) := 1$. Si l'affirmation est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction $f^{(n)}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$. Sur $]0, +\infty[$, $f^{(n)}$ est dérivable et sa dérivée vaut

$$f^{(n+1)}(x) = (-1/x^2)(P_n(1/x) + (\partial_x P_n)(1/x))e^{1/x}$$

d'où la conclusion en posant $P_{n+1}(x) := -x^2 P_n(x) + (\partial_x P_n)(x)$. Il reste à vérifier que $f^{(n)}$ est dérivable en 0. Pour cela, on remarque que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{P_n(1/x)e^{1/x}}{x} = 0. \quad \square$$

Proposition A.3. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nulle sur $]-\infty, a[$, strictement croissante sur $[a, b]$ et valant 1 sur $[b, +\infty[$.*

Démonstration. Considérons la fonction f du lemme A.2. Alors la fonction $x \mapsto f(x)f(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, strictement positive sur $]0, 1[$ et nulle sur $]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[$. Dès lors, la fonction

$$F(x) := \int_0^x f(x)f(1-x) dx$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nulle sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, 1]$ et constante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \frac{1}{F(1)} F\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ vérifie les propriétés de l'énoncé. \square

Proposition A.4. *Si $r, s \in \mathbb{R}$ sont tels que $0 < r < s$, alors il existe une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ radialement décroissante, valant 1 sur $B(0, r)$, strictement positive sur $B(0, s)$ et nulle sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0, s)$.*

Démonstration. D'après la proposition A.3, il existe une fonction $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ valant 0 sur $]-\infty, r]$, strictement croissante sur $[r, s]$ et valant 1 sur $[s, +\infty[$. Alors la fonction $\psi(x) := 1 - \xi(|x|)$ vérifie les propriétés de l'énoncé. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $|x| \leq |y|$, alors $\psi(x) \geq \psi(y)$. \square

Proposition A.5. *Si K est un compact non vide inclus dans Ω , alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et valant 1 sur K .*

Démonstration. Pour tout point $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que la boule $B(x, r_x)$ est incluse dans Ω . La famille $(B(x, r_x/3))_{x \in K}$ forme un recouvrement ouvert de K . Puisque K est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc un ensemble fini $\mathcal{X} \subseteq K$ tel que K est inclus dans l'union des $B(x, r_x/3)$ pour $x \in \mathcal{X}$. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on considère une fonction φ_x valant 1 sur $B(x, r_x/3)$ et nulle en dehors de $B(x, 2r_x/3)$. Une telle fonction existe d'après la proposition A.4. Dès lors, la fonction

$$\varphi(y) := 1 - \prod_{x \in \mathcal{X}} (1 - \varphi_x(y))$$

vérifie les propriétés de l'énoncé. En effet, cette fonction :

- est de classe \mathcal{C}^∞ car les φ_x le sont ;
- vaut 1 sur K car, pour tout $y \in K$, il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $y \in B(x, r_x/2)$;
- a un support inclus dans l'union des $B[x, 2r_x/3]$ pour $x \in \mathcal{X}$. \square

A.2 Convolution et régularisation

Notation A.6. La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est ouvert et que $\bar{\omega}$ est un compact de Ω .

Définition A.7. Définissons l'espace $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ par

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega, u|_\omega \text{ appartient à } L^1(\omega)\}.$$

Définition A.8 (Convolution). Si $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $n \geq 1$, alors la *convolution* $u * v$ est définie par

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y) \, dy.$$

Théorème A.9 (Dérivées d'une convolution). Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha(\rho * u) = (\partial^\alpha \rho) * u.$$

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour les dérivées d'ordre 1 puis d'itérer. Supposons que $|\alpha| = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{(\rho * u)(x + \varepsilon\alpha) - (\rho * u)(x)}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho(x + \varepsilon\alpha - y) - \rho(x - y)}{\varepsilon} u(y) \, dy.$$

Or, $\frac{\rho(x + \varepsilon\alpha - y) - \rho(x - y)}{\varepsilon}$ converge ponctuellement vers $\partial^\alpha \rho(x - y)$ et cette expression est bornée par la norme infinie de $\partial^\alpha \rho$. Le théorème de convergence dominée implique que $\rho * u$ admet une dérivée d'indice α donnée par

$$\partial^\alpha(\rho * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha \rho(x - y)u(y) \, dy = (\partial^\alpha \rho * u)(x). \quad \square$$

Définition A.10. Une *suite d'unités approchées de convolution* est une suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ de fonctions sur \mathbb{R}^N telles que

$$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \rho_n \subseteq B[0, 1/n], \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Exemple A.11. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction radiale, positive, à support dans $B[0, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \, dx = 1$. Une telle fonction existe d'après la proposition A.4 et quitte à multiplier ρ par une constante positive. Alors la suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$$

est une suite d'unités approchées de convolution.

Proposition A.12. Soient $1 \leq p < \infty$, $(\rho_n)_{n \geq 1}$ une suite d'unités approchées de convolution et $u \in L^p(\Omega)$. On pose

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Alors la suite $((\rho_n * \tilde{u})|_{\Omega})_{n \geq 1} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [9, Theorem 4.22]. \square

Théorème A.13. Pour tout $1 \leq p < \infty$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in L^p(\Omega)$. D'après le théorème A.12, il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$. Procédons par troncature. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$K_n := \{x \in \Omega \mid |x| \leq n \text{ et } \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n\}$$

où $\text{dist}(x, \partial\Omega) := \inf\{|x - y| \mid y \in \partial\Omega\}$ (avec la convention usuelle $\inf \emptyset := +\infty$).

Les $(K_n)_{n \geq 1}$ forment une suite croissante de compacts de Ω tels que Ω soit égal à l'union des K_n . Pour tout $n \geq 1$, considérons une fonction ξ_n de classe $C_c^\infty(\Omega)$, telle que $0 \leq \xi_n \leq 1$ et valant 1 sur K_n (une telle fonction existe d'après la proposition A.5). Alors, les fonctions $\xi_n u_n$ appartiennent à $C_c^\infty(\Omega)$ pour tout $n \geq 1$ et la suite $(\xi_n u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$ d'après le théorème de convergence dominée puisque $(\xi_n)_{n \geq 1}$ converge ponctuellement vers 1 sur Ω . \square

Théorème A.14 (Théorème d'annulation). Si la fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est telle que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0$$

alors u est nulle presque partout sur Ω .

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et tout $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subseteq \Omega$, u est nulle presque partout sur $B(x_0, r)$. Quitte à translater x_0 et Ω , on peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$. On considère une suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ d'unités approchées de convolution. Il existe $n_0 \geq 1$ tel

que le support de ρ_n est inclus dans $B(x_0, r/2)$ pour tout $n \geq n_0$. On pose $v := u\mathbb{1}_{B(x_0, r/2)}$. D'après le théorème A.12, la suite $(\rho_n * v)_{n \geq 1}$ converge vers v dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Or, pour tout $n \geq 1$, on a

$$(\rho_n * v)(x) = \int_{B(x_0, r/2)} u(y) \rho_n(x - y) dy = 0$$

puisque la fonction $y \mapsto \rho_n(x - y)$ appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On en déduit que v est nulle presque partout sur \mathbb{R}^N , autrement dit que u est nulle presque partout sur $B(x_0, r)$, ce qui conclut. \square

A.3 Convergence au sens des distributions

Définition A.15 (Convergence au sens des distributions pour les fonctions $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$). Soient $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u au sens des distributions (sur Ω) si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u_n(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

On note cette convergence par

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\Omega)} u.$$

Remarque A.16. La limite au sens des distributions d'une suite de fonctions est unique si elle existe. En effet, si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers des fonctions u et v au sens des distributions, alors

$$\int_{\Omega} (u(x) - v(x)) \varphi(x) dx = 0$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, donc u et v sont égales presque partout d'après le théorème d'annulation (théorème A.14).

Remarque A.17. Dans le contexte de la théorie des distributions et des dérivées faibles, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est souvent noté $\mathcal{D}(\Omega)$, ce qui explique la notation précédente.

Proposition A.18. Soient $p \in [1, \infty]$, $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$ et $u \in L^p(\Omega)$. Si $(u_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$, alors $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u au sens des distributions.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $p \in [1, \infty]$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, l'application

$$u \mapsto \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx$$

définit une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$. \square

A.4 Dérivées faibles et espaces de Sobolev

A.4.1 Définitions

Nous utiliserons la notation multi-indice pour les dérivées : si $\alpha \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice de longueur $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, on note $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N}$.

Définition A.19 (Dérivées faibles). Soient un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et deux fonctions $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que g est la *dérivée faible d'ordre α de f* si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} f(x)\partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx.$$

Le théorème d'annulation (théorème A.14) assure que la dérivée faible d'ordre α est unique si elle existe. Dans ce cas, on la note $\partial^\alpha f$.

Remarque A.20. Un calcul d'intégration par parties montre que si $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m$, la dérivée (au sens classique) $\partial^\alpha f$ est la dérivée faible d'ordre α de f (voir [44, Lemma 6.1.1]).

Remarque A.21. La dérivation faible satisfait des propriétés de linéarité et de compatibilité avec les restrictions.

- Si deux fonctions $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ admettent des dérivées faibles d'ordre α alors, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $au + bv$ admet une dérivée faible égale à $a\partial^\alpha u + b\partial^\alpha v$.
- Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ admet une dérivée faible d'ordre α et si Ω' est un ouvert inclus dans Ω , alors $u|_{\Omega'}$ admet $(\partial^\alpha u)|_{\Omega'}$ comme dérivée faible sur Ω' .

Remarque A.22. Si une fonction u admet une dérivée faible selon $\alpha \in \mathbb{N}^N$ qui admet elle-même une dérivée faible selon $\beta \in \mathbb{N}^N$, alors u admet une dérivée faible selon $\alpha + \beta$ et on a $\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u$.

Proposition A.23 (Translations). Soient $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tels que u admet une dérivée faible d'ordre α . Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, la fonction $v(x) := u(x - x_0)$ admet une dérivée d'ordre α donnée par $(\partial^\alpha v)(x) = (\partial^\alpha u)(x - x_0)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. En utilisant la fonction $x \mapsto \varphi(x + x_0)$ dans la définition de la dérivée faible d'ordre α de u , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \partial^\alpha \varphi(x + x_0) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha u(x) \varphi(x + x_0) dx.$$

En posant $y := x - x_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(y - x_0) \partial^\alpha \varphi(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha u(y - x_0) \varphi(y) dy.$$

Donc $y \mapsto \partial^\alpha u(y - x_0)$ est la dérivée faible d'ordre α de u . \square

Définition A.24 (Espaces de Sobolev). Pour tout $k \geq 1$ et $p \in [1, \infty[$, l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}$$

et est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

L'espace $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ est défini par

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \mid \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega, u|_\omega \text{ appartient à } W^{k,p}(\omega) \right\}.$$

Lorsque $p = 2$, on note $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. La norme de $H^k(\Omega)$ est associée au produit scalaire

$$(u \mid v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u \mid \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque A.25. L'espace $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ qui admettent une dérivée faible par rapport à toutes leurs variables. Tous les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ où $k \geq 1$ et $p \in [1, \infty[$ sont inclus dans $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Remarque A.26. Si $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ et $u \in W^{k,p}(\Omega)$, alors $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u dans $W^{k,p}(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, $(\partial^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\partial^\alpha u$ dans $L^p(\Omega)$.

Lemme A.27 (Fermeture du graphe de ∂^α pour la convergence au sens des distributions). Soient $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si toutes les fonctions f_n ($n \geq 1$) admettent une dérivée faible d'ordre α et si

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\Omega)} f \quad \text{et} \quad \partial^\alpha f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\Omega)} g,$$

alors g est la dérivée faible d'ordre α de f , i.e. $\partial^\alpha f = g$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_{\Omega} f_n(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^\alpha f_n(x) \varphi(x) \, dx.$$

En passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx.$$

Donc g est la dérivée faible d'ordre α de f . □

Proposition A.28. Pour tout $k \geq 1$ et $p \in [1, \infty[$, l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Si $p = 2$, l'espace $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ une suite de Cauchy dans $W^{k,p}(\Omega)$. Montrons qu'elle converge dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$. La suite $(\partial^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Puisque $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, il existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tel que $(\partial^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ converge vers v_α dans $L^p(\Omega)$. Désignons $v \in L^p(\Omega)$ la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$ dans $L^p(\Omega)$. Il reste à prouver que v appartient à $W^{k,p}(\Omega)$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a $\partial^\alpha v = v_\alpha$. Or,

- la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers v dans $L^p(\Omega)$, en particulier au sens des distributions ;
- la suite $(\partial^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ converge vers v_α dans $L^p(\Omega)$, en particulier au sens des distributions.

Puisque le graphe de ∂^α est fermé pour la convergence au sens des distributions (voir le lemme A.27), on conclut que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a $\partial^\alpha v = v_\alpha$. Dès lors, v appartient à $W^{k,p}(\Omega)$ et la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers v dans $W^{k,p}(\Omega)$. □

A.4.2 Opérations dans les espaces de Sobolev

Définition A.29 (Gradient). Soit $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$. Le *gradient* de u est la fonction $\nabla u : \Omega \rightarrow (L_{\text{loc}}^1(\Omega))^N$ définie par

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u).$$

Proposition A.30 (Dérivée faible d'une composition). Soient $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| < \infty$. Alors $f \circ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\partial_i(f \circ u) = (f' \circ u) \partial_i u.$$

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [44, Proposition 6.1.13]. \square

Proposition A.31 (Passage à la valeur absolue). Si $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$, alors $|u|$ appartient à $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ et

$$\nabla |u| = -\mathbb{1}_{\{u < 0\}} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u > 0\}} \nabla u.$$

En particulier, si u appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$ alors $|u|$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$. De plus, $\nabla |u|$ et ∇u ont la même norme L^p .

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, définissons

$$f_\varepsilon(t) := \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}.$$

La fonction f_ε est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Sa dérivée est donnée par

$$f'_\varepsilon(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}},$$

est bornée sur \mathbb{R} par 1 et converge ponctuellement vers la fonction

$$t \mapsto -\mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(t) + \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t).$$

D'après la proposition A.30 concernant les dérivées d'une composition, on a

$$\partial_i(f_\varepsilon \circ u) = f'_\varepsilon(u) \partial_i u.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que

$$f_\varepsilon \circ u \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\mathcal{D}'} |u|, \quad \partial_i(f_\varepsilon \circ u) \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\mathcal{D}'} -\mathbb{1}_{\{u < 0\}} \partial_i u + \mathbb{1}_{\{u > 0\}} \partial_i u.$$

Puisque le graphe de ∂^α est fermé pour la convergence au sens des distributions (voir le lemme A.27), on en déduit que u admet une dérivée faible selon i donnée par

$$\partial_i |u| = -\mathbb{1}_{\{u < 0\}} \partial_i u + \mathbb{1}_{\{u > 0\}} \partial_i u.$$

Si u appartient à $W^{1,p}(\Omega)$, l'expression précédente implique que $\nabla|u|$ et ∇u ont la même norme L^p . \square

Proposition A.32. *Si $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{1}_{\{u=k\}} \nabla u$ est nulle presque partout sur Ω .*

Démonstration. Quitte à remplacer u par $u - k$, on peut supposer que $k = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit

$$g_\varepsilon(t) := \sqrt{(t + \varepsilon)^2 + \varepsilon^2}.$$

La fonction g_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sa dérivée est donnée par

$$g'_\varepsilon(t) = \frac{t + \varepsilon}{\sqrt{(t + \varepsilon)^2 + \varepsilon^2}},$$

est bornée sur \mathbb{R} par 1 et converge ponctuellement vers la fonction

$$t \mapsto -\mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t).$$

Comme dans la preuve de la proposition A.31, on montre que

$$\partial_i |u| = -\mathbb{1}_{\{u < 0\}} \partial_i u + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{\{u=0\}} \partial_i u + \mathbb{1}_{\{u > 0\}} \partial_i u.$$

Or, la proposition A.31 implique que

$$\partial_i |u| = -\mathbb{1}_{\{u < 0\}} \partial_i u + \mathbb{1}_{\{u > 0\}} \partial_i u.$$

En égalant les deux expressions obtenues pour $\partial_i |u|$, on conclut que la fonction $\mathbb{1}_{\{u=0\}} \partial_i u$ est nulle presque partout. \square

Proposition A.33 (Maxima et minima). *Si $u, v \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$, on a*

$$\mathbb{1}_{\{u=v\}} \nabla u = \mathbb{1}_{\{u=v\}} \nabla v.$$

De plus, $\max(u, v)$ et $\min(u, v)$ appartiennent à $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ et on a

$$\begin{aligned} \nabla \max(u, v) &= \mathbb{1}_{\{u>v\}} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u=v\}} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u<v\}} \nabla v, \\ \nabla \min(u, v) &= \mathbb{1}_{\{u>v\}} \nabla v + \mathbb{1}_{\{u=v\}} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u<v\}} \nabla u. \end{aligned}$$

En particulier, si $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\max(u, v)$ et $\min(u, v)$ appartiennent à $W^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. D'après la proposition A.32, la fonction $\mathbb{1}_{\{u-v=0\}} \nabla(u-v)$ est nulle presque partout donc les fonctions $\mathbb{1}_{\{u=v\}} \nabla u$ et $\mathbb{1}_{\{u=v\}} \nabla v$ sont égales presque partout. On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} \max(u, v) &= \frac{1}{2}(u + v + |u - v|), \\ \min(u, v) &= \frac{1}{2}(u + v - |u - v|) \end{aligned}$$

et en appliquant la proposition A.31. □

Les deux propositions suivantes se montrent directement à partir de la définition des dérivées faibles et par le théorème de changement de variables pour les intégrales de Lebesgue.

Proposition A.34 (Changement de variables linéaires). *Si $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une application linéaire bijective et $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, alors $u \circ T$ appartient à $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $1 \leq i \leq N$, on a*

$$\partial_i(u \circ T) = \sum_{1 \leq j \leq N} (\partial_j u \circ T) M_{ij}$$

où $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est la matrice de T dans la base canonique. En particulier, si u appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$ alors $u \circ T$ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition A.35 (Translations et dilatations). *Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$, on note :*

- $T_y u = u(\cdot - y)$ l'image de u par la translation de vecteur y ;
- $D_\lambda u = u(\lambda \cdot)$ l'image de u par la dilatation de facteur λ .

Si u admet une dérivée faible selon $\alpha \in \mathbb{N}^N$, alors on a

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(T_y u) &= (\partial^\alpha u)(\cdot - y) = T_y(\partial^\alpha u) \\ \partial^\alpha(D_\lambda u) &= \lambda^{|\alpha|}(\partial^\alpha u)(\lambda \cdot) = \lambda^{|\alpha|} D_\lambda(\partial^\alpha u).\end{aligned}$$

En particulier, si u appartient à $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ alors $T_y u$ et $D_\lambda u$ appartiennent à $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$\|\partial^\alpha(T_y u)\|_{L^p} = \|\partial^\alpha u\|_{L^p}, \quad \|\partial^\alpha(D_\lambda u)\|_{L^p} = \lambda^{|\alpha| - \frac{N}{p}} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}.$$

A.4.3 Densité dans les espaces de Sobolev

Théorème A.36. *Soient $(\rho_n)_{n \geq 1}$ une suite d'unités approchées de convolution, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ une fonction admettant une dérivée faible d'ordre α . On pose*

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \quad (u_n)_{n \geq 1} := ((\rho_n * \tilde{u})|_\Omega)_{n \geq 1}.$$

Alors la suite $(\partial^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\partial^\alpha u$ au sens des distributions.

Démonstration. D'après le théorème de dérivation d'une convolution, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et sont telles que $\partial^\alpha u_n = (\partial^\alpha \rho_n) * \tilde{u}$.

▷ **Étape 1 Théorème de Fubini**

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (\partial^\alpha \rho_n * \tilde{u})(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha \rho_n(x-y) \tilde{u}(y) dy \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha \rho_n(x-y) \varphi(x) dx \right) dy \quad (\text{A.1})\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini.

▷ **Étape 2 Majoration et convergence de l'intégrale interne**

Soit $y \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $n \geq 1$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha \rho_n(x-y) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) \partial^\alpha \varphi(x) dx$$

en intégrant par parties. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx \right| \leq \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad (\text{A.2})$$

car $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) \, dx = 1$. De même,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) (\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)) \, dx \right| \leq \|\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)\|_{L^\infty(B[0,1/n])}$$

car le support ρ_n est inclus dans $B[0, 1/n]$. Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \partial^\alpha \varphi(y).$$

▷ **Étape 3 Conclusion**

D'après l'égalité (A.1), la majoration (A.2) et le résultat de convergence ponctuelle établi au point précédent, on obtient

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha u_n(x) \varphi(x) \, dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(y) \partial^\alpha \varphi(y) \, dy$$

grâce au théorème de convergence dominée. Les égalités

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(y) \partial^\alpha \varphi(y) \, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(y) \partial^\alpha \varphi(y) \, dy = \int_{\Omega} \partial^\alpha u(y) \varphi(y) \, dy$$

impliquent que la suite $(\partial^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u au sens des distributions sur Ω . \square

Proposition A.37 (Troncature et régularisation dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$). *Soient $k \geq 1$, $p \in [1, \infty[$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $(\rho_n)_{n \geq 1}$ une suite d'unités approchées de convolution et $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction valant 1 sur $B[0, 1]$, nulle sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0, 2)$ et telle que $0 \leq \xi \leq 1$. Alors, la suite $(\xi(x/n)(\rho_n * u))_{n \geq 1}$ converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque A.38. D'après la proposition A.4, il existe des fonctions radiales ξ satisfaisant les conditions de l'énoncé précédent.

Démonstration. Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. On pose $\xi_n(x) := \xi(x/n)$.

▷ **Étape 1 Régularisation**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n := \rho_n * u$. D'après le théorème A.12, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème A.36, on a $\partial_i u_n = \rho_n * \partial_i u$ pour tout $1 \leq i \leq N$. En utilisant à nouveau le théorème A.12, on en déduit que $(\partial_i u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\partial_i u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

▷ **Étape 2 Troncature**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n := \xi_n u_n$. Les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et à support compact. Pour tout $1 \leq i \leq N$, on a (au sens classique)

$$\partial_i(\xi_n u_n) = (\partial_i \xi_n) u_n + \xi_n (\partial_i u_n).$$

De plus :

- la suite $((\partial_i \xi_n) u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ en utilisant l'inégalité $|\partial_i \xi_n|_{L^\infty} \leq |\partial_i \xi|_{L^\infty} / n$ et le théorème de convergence dominée ;
- la suite $(\xi_n (\partial_i u))_{n \geq 1}$ converge vers $\partial_i u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ car $0 \leq \xi_n \leq 1$ et d'après le théorème de convergence dominée.

Donc la suite $(\xi_n u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ceci achève la preuve car les fonctions $\xi_n u_n$ appartiennent à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. \square

A.5 Espaces de Hölder

Définition A.39 (Régularité höldérienne). Soient un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^N$, une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $\theta \in]0, 1[$. On dit que la fonction f est

- *uniformément θ -höldérienne sur D* si le supremum

$$\sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\theta}$$

est fini. On note l'espace des fonctions uniformément θ -höldériennes sur D par $\mathcal{C}_{\text{unif}}^\theta(D)$;

- *localement θ -höldérienne sur D* si elle est uniformément θ -höldérienne sur tout compact inclus dans D . On note l'espace des fonctions localement θ -höldériennes sur D par $\mathcal{C}^\theta(D)$.

Les notions de régularité höldérienne permettent de définir des espaces qui « quantifient la dérivabilité des fonctions ».

Définition A.40 (Espaces de Hölder). Si $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 1[$, on note $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont bornées et dont les dérivées partielles d'ordre k sont uniformément θ -höldériennes sur $\overline{\Omega}$. On note $\mathcal{C}^{k,\theta}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k(\Omega)$ dont les dérivées partielles d'ordre k sont localement θ -höldériennes sur Ω .

A.6 Plongements de Sobolev

Les preuves des théorèmes suivants sont présentées dans [9, Section 9.3].

Théorème A.41 (Plongement de Sobolev, [9, Corollary 9.13]). *Soient $k \geq 1$ un nombre naturel et $p \in [1, +\infty[$. Alors :*

- si $kp < N$, on a

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N)$$

pour tout $q \in [p, \frac{Np}{N-kp}]$;

- si $kp = N$, on a

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N)$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$;

- si $kp > N$, on a

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Toutes les injections correspondantes sont continues.

De plus, si $\frac{kp-N}{p}$ est strictement positif et n'est pas entier, on pose

$$\ell := \left\lfloor \frac{kp-N}{p} \right\rfloor, \quad \theta := \frac{kp-N}{p} - \ell.$$

Alors, $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_{\text{unif}}^{\ell,\theta}(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément, il existe une constante $C(N,p) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a :

- si $|\alpha| \leq \ell$, on a

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq C(N,p) \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$;

- si $|\alpha| < \ell$, on a

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C(N, p) \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} |x - y|$$

pour presque tout $x, y \in \mathbb{R}^N$;

- si $|\alpha| = \ell$, on a

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C(N, p) \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} |x - y|^\theta$$

pour presque tout $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Remarque A.42. L'inégalité du cas $|\alpha| < \ell$ se déduit de celle du cas $|\alpha| = \ell$, voir [9, Note en bas de page 13 page 284].

Remarque A.43. Lorsque $kp < N$, le théorème énoncé dans [9, Corollary 9.13] mentionne uniquement l'injection de $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour $q = \frac{Np}{N-kp}$ mais le résultat tel qu'énoncé s'en déduit puisque $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^r(\mathbb{R}^N)$ pour tout $r \in [p, q]$ d'après l'inégalité de Hölder (voir [9, Theorem 4.6, Remark 2]).

Remarque A.44. Lorsque $p = 2$ et $N \geq 3$, l'exposant $\frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique du plongement de Sobolev pour l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Théorème A.45 (Rellich–Kondrachov, [9, Theorem 9.16]). *Si Ω est un ouvert borné de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^N (i.e. tel que $\partial\Omega$ est une sous-variété de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N , voir les définitions de [9, Section 9.2]), alors :*

- si $p < N$, on a

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$;

- si $p = N$, on a

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$;

- si $p > N$, on a

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$

Toutes les injections correspondantes sont **compactes**. En particulier, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte pour tout $p \in [1, \infty[$.

Annexe B

Principe du maximum

Les résultats de principe du maximum qui suivent ont fait l'objet d'un cours donné par Madame Colette De Coster [16] et sont présentés dans [35, Section 2.3, 28, Chapter 1, 20, Chapter 3].

Dans les énoncés des théorèmes suivants, Ω désigne un ouvert connexe non vide de \mathbb{R}^N .

Théorème B.1 (Principe du maximum fort). *Soient $c \geq 0$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. On suppose que $-\Delta u + cu \geq 0$ sur Ω et qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que x_0 est un minimum de u sur Ω (i.e. tel que $u(x) \geq u(x_0)$ pour tout $x \in \Omega$) et tel que $u(x_0) \leq 0$. Alors $u(x) = u(x_0)$ pour tout $x \in \Omega$.*

On peut remplacer l'hypothèse de positivité sur c par une hypothèse de positivité sur u .

Théorème B.2 (Principe du maximum fort pour les fonctions positives, [35]*Theorem 6). *Soient $c \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. On suppose que $-\Delta u + cu \geq 0$ sur Ω et que $u \geq 0$ sur Ω . Alors soit u est identiquement nulle sur Ω , soit u est strictement positive sur Ω .*

Démonstration. Si u n'est pas strictement positive sur Ω alors il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = 0$. Si $c \geq 0$, on applique le théorème B.1. Si $c < 0$, on remarque que $-\Delta u \geq -cu \geq 0$ sur Ω et on applique le théorème B.1 à l'opérateur $-\Delta$. Dans les deux cas, on en déduit que u est identiquement nulle sur Ω . \square

Théorème B.3 (Lemme de Hopf, [35]*Theorem 8). Soient $c \geq 0$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $x_0 \in \partial\Omega$ tels que :

- $u(x_0) \leq 0$;
- $u(x) \geq u(x_0)$ pour tout $x \in \Omega$;
- il existe $y_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(y_0, r) \subseteq \Omega$ et tels que $|x_0 - y_0| = r$.

Si $-\Delta u + cu \geq 0$ sur Ω alors :

- ou bien $u(x) = u(x_0)$ pour tout $x \in \Omega$;
- ou bien $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} < 0$ pour toute direction ν pointant vers l'extérieur de la sphère $\mathbb{S}(y_0, r)$.

Théorème B.4 (Lemme de Hopf pour les fonctions positives). Soient $c \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $x_0 \in \partial\Omega$ tels que :

- $u(x_0) = 0$;
- il existe $y_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(y_0, r) \subseteq \Omega$ et tels que $|x_0 - y_0| = r$.

Si $u \geq 0$ et $-\Delta u + cu \geq 0$ sur Ω alors :

- ou bien $u(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$;
- ou bien $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} < 0$ pour toute direction ν pointant vers l'extérieur de la sphère $\mathbb{S}(y_0, r)$.

Démonstration. Si $c \geq 0$, on peut appliquer le théorème B.3. Si $c < 0$, il suffit de remarquer que $-\Delta u \geq -cu \geq 0$ et de conclure en appliquant le théorème B.3 pour l'opérateur $-\Delta$. □

Bibliographie

- [1] D. R. ADAMS et L. I. HEDBERG. *Function spaces and potential theory*. T. 314. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1996, p. xii+366. DOI : 10.1007/978-3-662-03282-4.
- [2] A. AFTALION, J. DALIBARD et C. JOSSERAND. « Équation de Schrödinger non linéaire : des condensats de Bose Einstein aux supersolides ». In : (2010). eprint : <http://aftalion.perso.math.cnrs.fr/Xcours/poly.pdf>.
- [3] T. BARTSCH et M. WILLEM. « Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation ». In : *J. Funct. Anal.* 117.2 (1993), p. 447-460. DOI : 10.1006/jfan.1993.1133.
- [4] T. BARTSCH et M. WILLEM. « Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on \mathbf{R}^N ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 124.3 (1993), p. 261-276. DOI : 10.1007/BF00953069.
- [5] H. BERESTYCKI et P.-L. LIONS. « Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 82.4 (1983), p. 313-345. DOI : 10.1007/BF00250555.
- [6] H. BERESTYCKI, P.-L. LIONS et L. A. PELETIER. « An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in \mathbf{R}^N ». In : *Indiana Univ. Math. J.* 30.1 (1981), p. 141-157. DOI : 10.1512/iumj.1981.30.30012.
- [7] G. A. BLISS. « An Integral Inequality ». In : *J. London Math. Soc.* 5.1 (1930), p. 40-46. DOI : 10.1112/jlms/s1-5.1.40.
- [8] D. BONHEURE, C. GRUMIAU et C. TROESTLER. « Multiple radial positive solutions of semilinear elliptic problems with Neumann boundary conditions ». In : *Nonlinear Anal.* 147 (2016), p. 236-273. DOI : 10.1016/j.na.2016.09.010.
- [9] H. BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, p. xiv+599.

- [10] A. BURCHARD. *A Short Course on Rearrangement Inequalities*. 2009. URL : <http://www.math.utoronto.ca/almut/rearrange.pdf>.
- [11] N. BURQ. « Explosion pour l'équation de Schrödinger au régime du log log (d'après Merle-Raphael) ». In : *Astérisque* 311 (2007). Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006, Exp. No. 953, vii, 33-53.
- [12] T. CAZENAVE. *An overview of the nonlinear Schrödinger equation*. Nov. 2020. URL : <https://www.ljll.math.upmc.fr/cazenave/overviewNLS.pdf>.
- [13] T. CAZENAVE. *Semilinear Schrödinger equations*. T. 10. Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, p. xiv+323. DOI : 10.1090/cln/010.
- [14] T. CAZENAVE et F. B. WEISSLER. « The structure of solutions to the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation ». In : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 117.3-4 (1991), p. 251-273. DOI : 10.1017/S0308210500024719.
- [15] M. CUESTA et C. DE COSTER. « A resonant-superlinear elliptic problem revisited ». In : *Adv. Nonlinear Stud.* 13.1 (2013), p. 97-114. DOI : 10.1515/ans-2013-0106.
- [16] C. DE COSTER. « Cours sur le Principe du Maximum ». 2020-2021.
- [17] G. FIBICH. *The nonlinear Schrödinger equation*. T. 192. Applied Mathematical Sciences. Singular solutions and optical collapse. Springer, Cham, 2015, p. xxxii+862. DOI : 10.1007/978-3-319-12748-4.
- [18] G. FIBICH, F. MERLE et P. RAPHAËL. « Proof of a spectral property related to the singularity formation for the L^2 critical nonlinear Schrödinger equation ». In : *Phys. D* 220.1 (2006), p. 1-13. DOI : 10.1016/j.physd.2006.06.010.
- [19] B. GIDAS, W. M. NI et L. NIRENBERG. « Symmetry and related properties via the maximum principle ». In : *Comm. Math. Phys.* 68.3 (1979), p. 209-243.
- [20] D. GILBARG et N. S. TRUDINGER. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Reprint of the 1998 edition. Springer-Verlag, Berlin, 2001, p. xiv+517.
- [21] J. GINIBRE et G. VELO. « On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case ». In : *J. Functional Analysis* 32.1 (1979), p. 1-32. DOI : 10.1016/0022-1236(79)90076-4.

- [22] J. JOST. *Partial differential equations*. 3^e éd. T. 214. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013, p. xiv+410. DOI : 10.1007/978-1-4614-4809-9.
- [23] O. KAVIAN et F. B. WEISSLER. « Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation ». In : *Michigan Math. J.* 41.1 (1994), p. 151-173. DOI : 10.1307/mmj/1029004922.
- [24] I. A. KUZIN et S. POHOZAEV. *Entire solutions of semilinear elliptic equations*. T. 33. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, p. vi+250.
- [25] M. K. KWONG. « Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in \mathbf{R}^n ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 105.3 (1989), p. 243-266. DOI : 10.1007/BF00251502.
- [26] J.-F. LE GALL. *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires (cours donné à l'Ecole normale supérieure de Paris)*. 2006. URL : <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jfllegall/IPPA2.pdf>.
- [27] P.-L. LIONS. « Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev ». French, with English summary. In : *J. Functional Analysis* 49.3 (1982), p. 315-334. DOI : 10.1016/0022-1236(82)90072-6.
- [28] J. LÓPEZ-GÓMEZ. *Linear second order elliptic operators*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013, p. xviii+337. DOI : 10.1142/8664.
- [29] K. MCLEOD. « Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in \mathbf{R}^n . II ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 339.2 (1993), p. 495-505. DOI : 10.2307/2154282.
- [30] F. MERLE. « Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power ». In : *Duke Math. J.* 69.2 (1993), p. 427-454. DOI : 10.1215/S0012-7094-93-06919-0.
- [31] F. MERLE et P. RAPHAEL. « Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation ». In : *Geom. Funct. Anal.* 13.3 (2003), p. 591-642. DOI : 10.1007/s00039-003-0424-9.
- [32] F. MERLE et P. RAPHAËL. « On universality of blow-up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation ». In : *Invent. Math.* 156.3 (2004), p. 565-672. DOI : 10.1007/s00222-003-0346-z.
- [33] F. MERLE et P. RAPHAËL. « The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation ». In : *Ann. of Math. (2)* 161.1 (2005), p. 157-222. DOI : 10.4007/annals.2005.161.157.

- [34] G. PERELMAN. « On the blow up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D ». In : 2000, Exp. No. III, 16.
- [35] M. H. PROTTER et H. F. WEINBERGER. *Maximum principles in differential equations*. Réimpression de l'édition originale de 1967. Springer-Verlag, New York, 1984, p. x+261. DOI : 10.1007/978-1-4612-5282-5.
- [36] W. A. STRAUSS. « Existence of solitary waves in higher dimensions ». In : *Comm. Math. Phys.* 55.2 (1977), p. 149-162.
- [37] C. SULEM et P.-L. SULEM. *The nonlinear Schrödinger equation*. T. 139. Applied Mathematical Sciences. Self-focusing and wave collapse. Springer-Verlag, New York, 1999, p. xvi+350.
- [38] G. TALENTI. « Best constant in Sobolev inequality ». In : *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 110 (1976), p. 353-372. DOI : 10.1007/BF02418013.
- [39] T. TAO. « A pseudoconformal compactification of the nonlinear Schrödinger equation and applications ». In : *New York J. Math.* 15 (2009), p. 265-282.
- [40] T. TAO. *Nonlinear dispersive equations*. T. 106. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Local and global analysis. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, p. xvi+373. DOI : 10.1090/cbms/106.
- [41] J. VAN SCHAFTINGEN. « Explicit approximation of the symmetric rearrangement by polarizations ». In : *Arch. Math. (Basel)* 93.2 (2009), p. 181-190. DOI : 10.1007/s00013-009-0018-3.
- [42] J. VAN SCHAFTINGEN. *Réarrangements et problèmes elliptiques non linéaires*. 2002. URL : <https://perso.uclouvain.be/jean.vanschaftingen/publications/finals/vanschaftingen-2002.pdf>.
- [43] M. I. WEINSTEIN. « Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates ». In : *Comm. Math. Phys.* 87.4 (1982-1983), p. 567-576.
- [44] M. WILLEM. *Functional analysis*. Cornerstones. Fundamentals and applications. Birkhäuser/Springer, New York, 2013, p. xiv+213. DOI : 10.1007/978-1-4614-7004-5.
- [45] M. WILLEM. *Minimax theorems*. T. 24. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996, p. x+162. DOI : 10.1007/978-1-4612-4146-1.

- [46] K. YANG, S. ROUDENKO et Y. ZHAO. « Blow-up dynamics and spectral property in the L^2 -critical nonlinear Schrödinger equation in high dimensions ». In : *Nonlinearity* 31.9 (2018), p. 4354-4392. DOI : 10.1088/1361-6544/aacc41.